А. Д. АЛЕКСАНДРОВ
А. Л. ВЕРНЕР
В. И. РЫЖИК

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Геометрия

10

11

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ
А. Л. ВЕРНЕР
В. И. РЫЖИК

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Геометрия

10-11 классы

Учебник

для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва
«Просвещение»
2014

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72+22.161я72
А46

На учебник получены
положительные экспертные заключения по результатам научной (заключение РАН № 10106-5215/145 от 15.10.2013 г.), **педагогической** (заключение № 407 от 29.01.2014 г.) и **общественной** (заключение РКС № 392 от 07.02.2014 г.) экспертиз.

Александров А. Д.
А46 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10—11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2014. — 255 с.: ил. — ISBN 978-5-09-028109-6.

Чёткая структура, высокая научность, доступность изложения, простота и краткость — отличительные черты этого учебника. Авторы представляют геометрию как науку, тесно связанную с окружающим миром. Появлению абстрактного понятия предшествует реальная картина, которая аргументирует необходимость этой абстракции.

К каждому параграфу даётся набор задач. Среди них выделены задачи базового уровня, т. е. обязательные для всех, и задачи углублённого уровня. Именно в задачах заложен принцип развивающего обучения. К главам имеются задачи «Применяем компьютер» с использованием среды «Живая математика». В учебнике даются обобщающие задачи к главам и итоги каждой главы для выделения основных результатов её изучения. Большую помощь учащимся окажут предметный указатель и ответы.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72+22.161я72

ISBN 978-5-09-028109-6

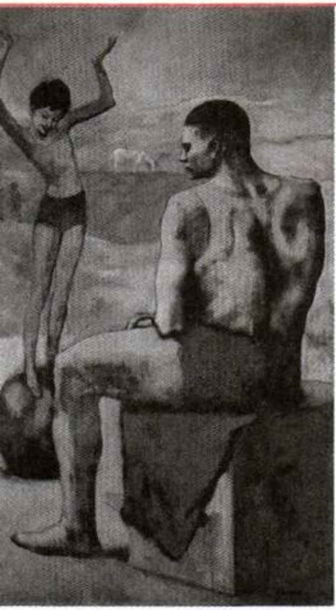
Оглавление

Глава III

ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Глава IV

МНОГОГРАННИКИ



Введение

О геометрии. ▲Своеобразие геометрии заключается в неразрывной связи живого воображения со строгой логикой. Можно сказать, что геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой. Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, определение, теорема или задача, непременно присутствуют оба эти элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод.

Наглядность, воображение принадлежат больше искусству, а строгая логика — привилегия науки. Сухость точного вывода и живость наглядной картины — геометрия соединяет в себе эти две противоположности. Так её и надо изучать: соединяя наглядные картины со строгими формулировками и доказательствами.

Поэтому основное правило состоит в том, что, встречаясь с определением, теоремой или задачей, нужно прежде всего понять их содержание: представить наглядно, зарисовать или ещё лучше, хотя и труднее, вообразить то, о чём идёт речь. Ничего не старайтесь заучить, не нарисовав, не вообразив того, о чём написано в учебнике, не поняв, как это наглядное представление точно выражается в формулировке определения, теоремы или задачи.

Геометрия возникла из практических задач, её предложения выражают реальные факты и находят многочисленные применения. В конечном счёте в основе всей техники так или иначе лежит геометрия, потому что она появляется везде, где нужна малейшая точность в определении формы и размеров. И технику, и инженеру, и рабочему, и архитектору, и модельеру необходимо геометрическое воображение.

Установлено, что каждое десятое изобретение сделано с применением геометрии, за счёт выбора подходящей формы, удачного размещения и т. п. А ведь изобретений миллионы.

Математика, геометрия в частности, представляет собой могущественный инструмент познания природы и создания техники. ▼

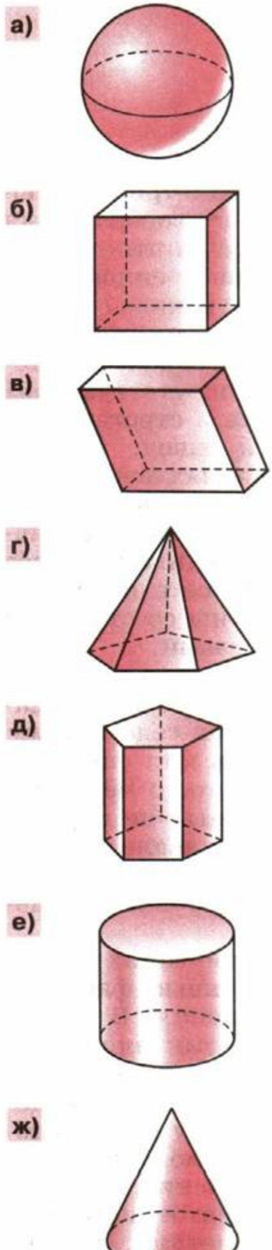


Рис. 1

II О пространственных фигурах. Раньше вы изучали главным образом геометрию на плоскости — планиметрию, а теперь будете заниматься геометрией в пространстве. Её называют **стереометрией** (от греческих слов «стереос» — пространственный, «метрео» — измеряю). Обращаясь к геометрии в пространстве — к стереометрии, мы предполагаем, что геометрия на плоскости — планиметрия — вам в основном известна.

Каждый представляет, что такое плоскость или по крайней мере конечный кусок плоскости, как поверхность стола, доски и т. п. В планиметрии плоскость рассматривается сама по себе независимо от окружающего пространства. В стереометрии же плоскость — это фигура в пространстве, в котором много плоскостей. На каждой из них выполняются все положения планиметрии.

Вместе с каждой плоскостью в пространстве есть содержащиеся в ней известные вам фигуры — точки, отрезки, треугольники, окружности и т. д. Основными свойствами этих фигур, теоремами о них, доказанными в планиметрии, мы будем пользоваться.

Однако важнейшими в стереометрии являются пространственные фигуры, тела, не лежащие ни в какой плоскости. Простейшие знакомые вам тела изображены на рисунке 1: а) шар; б) куб; в) параллелепипед; г) пирамида; д) призма; е) цилиндр; ж) конус. Определения шара, призмы, цилиндра и конуса мы дадим позже, а сейчас напомним, что **куб** — это многогранник, у которого шесть граней, и все они квадраты. **Прямоугольный параллелепипед** — это многогранник, у которого шесть граней, и все они прямоугольники. А вообще **параллелепипед** — это многогранник, у которого шесть граней, и все они параллелограммы.

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — какой-либо многоугольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной. Первая грань называется **основанием пирамиды**, остальные же называются **боковыми гранями**; их общая вершина называется **вершиной пирамиды**. Стороны граней пирамиды называются её **рёбрами**, причём рёбра, сходящиеся в вершине, называются **боковыми.** Если основание пирамиды — n-угольник, то пирамида называется ***n*-угольной**.

Простейшей среди всех пирамид (и даже среди всех многогранников) является треугольная пирамида, которую называют также **тетраэдром,** т. е. четырёхгранником (рис. 2). У тетраэдра четыре грани, и все они треугольники.

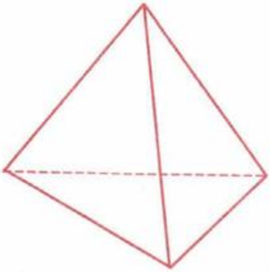


Рис. 2

Пирамида называется **правильной**, если её основание — правильный многоугольник, а все боковые рёбра равны (рис. 3). Знаменитые египетские пирамиды — правильные четырёхугольные.

III **О теоретической части курса.** Весь курс разбит на шесть глав (по три на каждый класс). Глава I вводная, а центральной и основной в курсе 10 класса является глава II, где изучается перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей, а также расстояния и углы. (Эту главу можно назвать «строительной геометрией», поскольку изучаемые в ней вопросы играют главную роль в строительстве. Завершает курс 10 класса глава III, в которой рассказано о важнейших пространственных фигурах — сфере и шаре, цилиндрах и конусах. Последний параграф этой главы (§ 20) посвящён геометрии окружности.

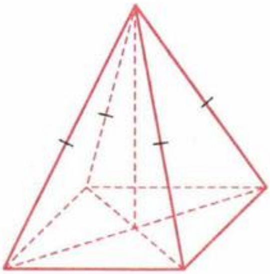


Рис. 3

Курс 11 класса начинается главой IV о многогранниках и симметрии фигур. В главе V речь идёт об измерении объёмов тел и площадей их поверхностей.

В последней же — главе VI — о координатах и векторах рассматриваются такие методы геометрии, которые возникли значительно позднее. Завершает книгу рассказ о современной геометрии.

Главы разбиты на параграфы (у них единая нумерация), а параграфы — на пункты (у пунктов двойная нумерация: например, п. 17.3 — это третий пункт из § 17).

Пункты, относящиеся *одновременно* и к базовому и к углублённому уровню образовательного стандарта по математике набраны **чёрным цветом** на цветной плашке таким образом: **24.5**.

Пункты ознакомительного характера (как, например, в заключении) набраны так: **2.1**.

Пункты, относящиеся *только* к углублённому уровню, обозначены таким образом: **29.5**.

Теоретический материал учебника разбит на две части — основную и дополнительную.

Основная часть, во-первых, содержит теоретические сведения (аксиомы, определения, теоремы), которые надо твёрдо усвоить и уметь применять при решении задач. Во-вторых, к основной части относится материал, в котором рассказано о значении наиболее важных геометрических результатов, о различных применениях стереометрии в других науках, технике, искусстве, быту, об истории геометрии. С этим материалом, отмеченным значками ▲ (начало) и ▼ (конец), следует ознакомиться. Он поможет вам понять роль геометрии и её место в современной культуре.

В каждом параграфе после теоретической части предложены вопросы для самоконтроля. Очень важно самому подготовить ответы на них — тогда на уроке вы будете чувствовать себя уверенней.

Определяя новое понятие, мы выделяем его (или всё определение) **полужирным шрифтом** (например, **куб**). Формулировки аксиом, теорем и их следствий набраны также **полужирным шрифтом**. Остальные же предложения, на которые надо обратить особое внимание, выделены *курсивом*. Начало доказательства выделено словом **доказательство** или значком □. Окончание доказательства утверждения обозначается значком ■.

Так же обозначается конец замечания.

Если вы забыли какое-то определение, то найти его в учебнике вам поможет предметный указатель в конце книги. Там же помещён список дополнительной литературы к учебнику.

IV **О задачах.** После *вопросов для самоконтроля* в каждом параграфе (кроме чисто теоретического § 25) идут задачи к этому параграфу. У задач к параграфу двойная нумерация: сначала указан номер параграфа, а затем номер задачи в этом параграфе. Например, задача 20.15 — это пятнадцатая задача к § 20. Более трудные задачи отмечены значком *.

Различия в теоретическом стереометрическом материале базового и углублённого уровней незначительны. Существенное различие этих уровней в задачном материале: *базовому уровню* соответствуют более простые задачи (их номера **чёр-**

ного цвета), *углублённому уровню* — более сложные задачи (их номера красного цвета).

У некоторых задач, отмеченных как базовые и разбитых на **пункты** а), б), в) и т. д., часть пунктов соответствует базовому уровню — они отмечены **чёрным цветом**, а остальные пункты углублённого уровня — они отмечены красным цветом.

Задачи к параграфу обычно начинаются с небольшого числа задач, *дополняющих теорию* этого параграфа. Они отделены от других задач к параграфу. На такие задачи возможны в дальнейшем ссылки наравне с теоретическим текстом.

О том, что надо сделать, решая задачу, в большинстве условий задач сказано в утвердительной форме: *Нарисуйте*, *Вычислите*, *Докажите*, *Постройте*, *Найдите границы* и т. п.

Но условия многих задач содержат и вопросы. Есть задачи, где ставятся такие вопросы: «*Как вычислить...?*», «*Как найти...?*», «*Как построить...?*» и т. п. В этих задачах главное — составить **план решения**, может быть, даже **алгоритм решения**. После этого можно получить ответ в виде формулы, введя необходимые величины.

Ещё одна группа задач содержит вопросы другого типа: «*Есть ли...?*», «*Можно ли...?*», «*Может ли быть...?*», «*Верно ли...?*», «*Какой по форме...?*», «*Какого вида...?*» и т. п. Это задачи **исследовательского характера**. В условиях таких задач возможна некая неопределённость, незавершённость, даже неоднозначность. Возможно и отсутствие решения этих задач, что вы должны выяснить.

В условиях некоторых задач речь идёт о реальных бытовых ситуациях: например, в задаче 11.4 о часовых стрелках или в задаче 27.33 об арбузах. При решении таких задач **прикладной геометрии** их условие ещё надо перевести на математический язык.

Кроме задач к параграфам, в которых проверяется усвоение содержания именно этого параграфа, есть ещё задачи к главам. Эти задачи труднее задач к параграфам, они многоплановы и имеют итоговый характер.

В задачах к главам I, II, VI имеется рубрика **«Применяем компьютер»**. Решая задачи этой рубрики, используйте, например, среду «Живая математика», которую можно найти по адресу: http:www.uchportal.ru/load/24-1-0-2276.

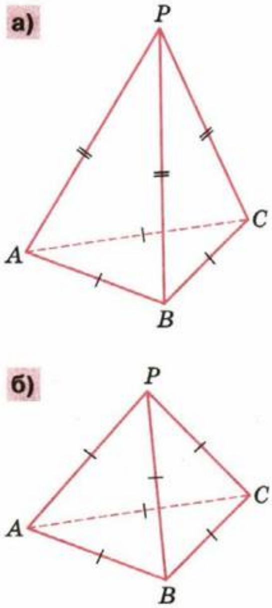


Рис. 4

Из всех многогранников в задачах чаще всего рассматриваются пирамиды — треугольные (тетраэдры) и четырёхугольные. Для удобства мы обозначаем их соответственно $PABC$ и $PABCD$, считая, что основанием пирамиды является треугольник ABC или четырёхугольник $ABCD$, а вершиной — точка P.

В основании **правильной треугольной пирамиды** $PABC$ лежит равносторонний (правильный) треугольник ABC, а боковые рёбра её равны: $PA = PB = PC$ (рис. 4, *а*).

Может оказаться, что у правильной треугольной пирамиды $PABC$ боковые рёбра равны сторонам основания, т. е. в таком тетраэдре все рёбра равны. Тетраэдр, у которого все рёбра равны, называется **правильным тетраэдром;** все его грани — правильные треугольники (рис. 4, *б*). А у правильной треугольной пирамиды заведомо лишь одна грань — основание — правильный треугольник. Боковые же её грани — равнобедренные треугольники.

Отметим ещё, что в основании правильной четырёхугольной пирамиды лежит квадрат $ABCD$.

V **О рисунках.** Отличие рисунков, используемых в стереометрии (например, рисунков 1—3), от тех, какими иллюстрируется курс планиметрии, состоит в том, что на плоскости рисунка (в книге, в тетради, на доске) изображены не только плоские, но и пространственные фигуры. Основные правила и приёмы таких изображений будут обоснованы в курсе стереометрии. Перечислим сейчас самые простые из них.

1) Плоскость изображается в виде параллелограмма (рис. 5, *а*), а иногда в виде произвольной области (рис. 5, *б*).

2) Параллельные отрезки (как и прямые) изображаются параллельными отрезками (как при изображении куба или призмы на рисунке 1, *б*, *в*, *д*).

3) Середина отрезка изображается как середина его изображения, которое тоже является отрезком.

Очень важно уметь правильно, наглядно изображать пространственные фигуры и, наоборот, посмотрев на рисунок, представить себе форму пространственной фигуры, изображённой на нём. Это трудно, но этому можно научиться.

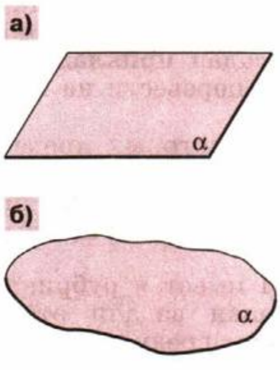
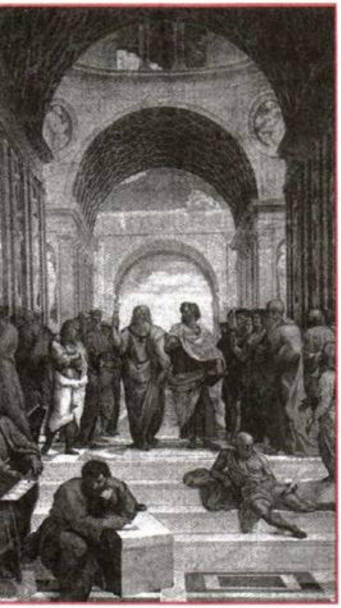


Рис. 5



Глава I
ОСНОВАНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

«Геометрия за то и прославляется, что, заимствовав извне столь мало основных положений, она столь много достигает» — написал великий Исаак Ньютон (1643—1727) в предисловии к своему главному сочинению «Математические начала натуральной философии». Ясно, что он имел в виду аксиоматический (дедуктивный) метод, идущий от «Начал» Евклида.

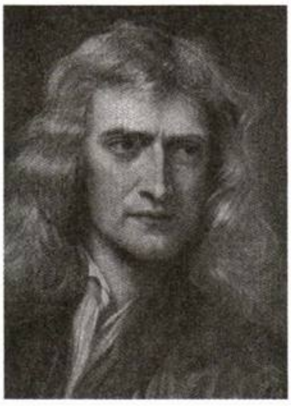
Именно так, дедуктивно, опираясь на пять аксиом, сформулированных в § 1, начинается построение стереометрии в этой главе. Важнейшие положения геометрии на плоскости — планиметрии — уже изучены в курсе основной школы. Те из них, которые относятся к треугольникам, повторяются в пункте 1.6.

Первые предложения о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве мы получим в § 2 и 3. Сами по себе они достаточно очевидны. Доказательства их даются как пример строгого вывода из аксиом со всеми необходимыми ссылками на аксиомы и предыдущие теоремы.

Это учит обоснованию выводов. Когда на ваши утверждения вам задают вопрос: «Откуда это следует?» — на него нужно уметь ответить. Это нужно не только в геометрии, но не меньше и в жизни: приучаться обосновывать свои выводы.

Но, как уже говорилось, геометрия соединяет в себе строгую логику с наглядностью. Поэтому все свои логические рассуждения мы всегда будем иллюстрировать рисунками. О том, как рисовать пространственные фигуры, рассказано в § 4.

В последнем параграфе этой главы — § 5 «Существование и единственность. Построения» — даётся логический анализ структуры и содержания первых предложений стереометрии, содержащихся в § 1—3, объясняется, как в стереометрии надо понимать слова «построить», «провести» и т. п., сравниваются построения на плоскости и в пространстве. Теорем в этом параграфе нет, но в нём есть та математика,



Исаак Ньютон

о которой М. В. Ломоносов сказал, что «она ум в порядок приводит». На заставке к этой главе на с. 13 изображена знаменитая фреска Рафаэля Санти «Афинская школа». В центре фрески создатель логики Аристотель рядом со своим учителем Платоном. Девиз Академии Платона был: «Не знающий геометрии да не войдёт в академию!» Эта фреска славит науки, и древнейшую из них — геометрию.

§ 1 Аксиомы стереометрии

1.1 Аксиома плоскости. Изучение стереометрии мы начинаем с формулировки её **аксиом** — тех её утверждений, которые принимаются без доказательства. Исходя из них, получим выводы стереометрии путём логических рассуждений.

Как уже было сказано в предисловии, геометрию на плоскости — планиметрию — мы считаем известной. Поэтому в стереометрии принимаем как определение: **плоскостями называются фигуры, на которых выполняется планиметрия и для которых верны аксиомы стереометрии.**

Можно представить себе плоскость (точнее, её часть) как поверхность стола, стены, ровной площадки на земле. Все фигуры, лежащие в плоскости, называются в стереометрии так же, как они назывались в планиметрии: прямые, отрезки, треугольники, окружности и т. д. Простейшими фигурами в пространстве (как и на плоскости) являются точки. Как и в планиметрии, в стереометрии точки обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C, ... Плоскости обычно обозначаются малыми буквами греческого алфавита: α, β, γ, ... Прямые обозначаются малыми латинскими буквами: a, b, c, ...

Аксиома 1. **В пространстве существуют плоскости. Через каждые три точки пространства проходит плоскость** (рис. 6).

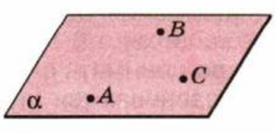


Рис. 6

Вторую часть аксиомы плоскости можно выразить ещё и так: *через каждые три точки можно провести плоскость* — или так: *любые три точки лежат в одной плоскости.*

Говоря «существуют плоскости», мы подчёркиваем, что пространство не исчерпывается только одной плоскостью.

Сделаем несколько выводов из аксиомы плоскости.

Следствие 1. Множество точек пространства бесконечно.

Доказательство. В пространстве есть плоскости, а на каждой плоскости, как известно из планиметрии, множество точек бесконечно. ■

Следствие 2. Через каждую одну или две точки проходит плоскость (а не только через три).

Докажите его самостоятельно.

Следствие 3. В пространстве через каждые две точки проходит прямая.

Доказательство. В пространстве через каждые две точки проходит плоскость, а в плоскости через каждые две точки проходит прямая. ■

1.2 Аксиома пересечения плоскостей. Взаимное расположение двух плоскостей.

Напомним, что **пересечение двух фигур — это их общая часть.**

Аксиома 2. Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть их общая прямая (рис. 7, *а*).

Сказанное в аксиоме означает, что пересечение двух плоскостей α и β является прямой как на одной, так и на другой плоскости. Например, пересечение двух стен, стены и потолка.

Две **плоскости**, имеющие общую точку и тем самым (по аксиоме 2) общую прямую, называются **пересекающимися.** О них говорят: *две плоскости пересекаются по прямой* или, короче, *плоскости пересекаются.*

Из аксиомы 2 вытекает, что для взаимного расположения двух плоскостей могут представиться лишь две возможности:

1. Две плоскости имеют общую точку. Тогда они имеют общую прямую — пересекающиеся плоскости (см. рис. 7, *а*).

2. Две плоскости не имеют общих точек. Такие **плоскости** называются **параллельными** (рис. 7, *б*).

В аксиоме 2 говорится о пересечении в пространстве двух плоскостей. Используя эту аксиому, находят пересечения плоскостей и с другими пространственными фигурами, например с мно-

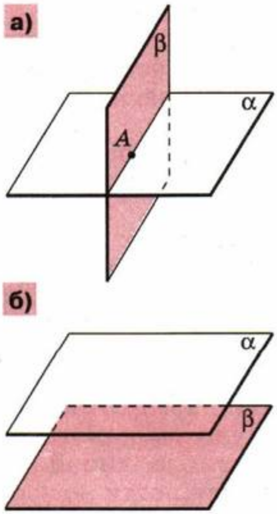


Рис. 7

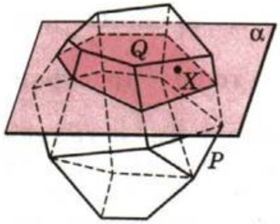


Рис. 8

гогранниками. Их называют сечениями многогранников.

Итак, **сечением многогранника** P **плоскостью** α (в случае, когда P и α имеют общую точку X) называется фигура, состоящая из общих точек многогранника P и плоскости α (фигура Q на рисунке 8).

Строить сечения многогранников мы начнём с первых уроков. Позднее будут рассмотрены сечения шаров, сфер, конусов, цилиндров плоскостями.

1.3 Аксиома о прямой и плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости

Аксиома 3. **Если прямая проходит через две точки плоскости, то она лежит в этой плоскости.**

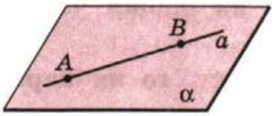


Рис. 9

Другими словами: *если две точки данной прямой принадлежат данной плоскости, то прямая содержится в плоскости* (рис. 9).

Из этой аксиомы следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она может иметь с нею не более одной общей точки, т. е. лишь одну, или вообще не иметь.

Итак, для взаимного расположения прямой и плоскости существуют только три возможности:

1. Прямая лежит в плоскости (рис. 9).
2. Прямая имеет с плоскостью только одну общую точку. В этом случае говорят, что **прямая и плоскость пересекаются**, или называют их **пересекающимися** (рис. 10, *а*).
3. Прямая не имеет с плоскостью общих точек (рис. 10, *б*). Такие прямая и плоскость называются **параллельными**.

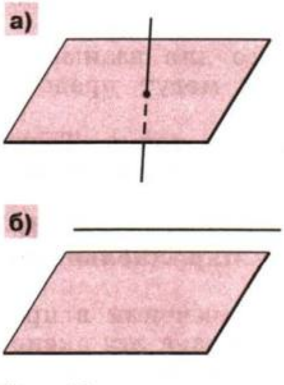


Рис. 10

Замечание. Характерным свойством плоскости, выраженным в аксиоме 3, пользуются на практике. Например, когда проверяют, ровно ли оштукатурена плоская стена, натягивают шнур вдоль неё в различных направлениях (рис. 11 на с. 17). Шнур, прикасаясь к стене в двух точках, должен целиком лечь на неё и не изогнуться. На практике проверить, что поверхность какого-то предмета плоская, можно с помощью линейки. Если, прикладывая линейку к поверхности во всевозможных направлениях, мы нигде не получим зазора, значит, поверхность плоская.

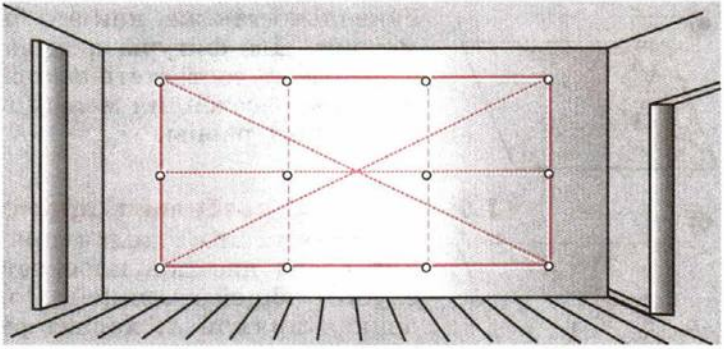


Рис. 11

1.4 **Аксиома расстояния. Равенство фигур.** Через каждые две точки в пространстве проходят плоскости. На каждой плоскости выполняется планиметрия. Следовательно, на каждой плоскости между двумя выбранными точками есть определённое расстояние — длина соединяющего их отрезка. Хотя две точки принадлежат одновременно разным плоскостям, но расстояние между ними на каждой из этих плоскостей будет одно и то же. Выразим это как аксиому.

Аксиома 4. Расстояние между любыми двумя точками пространства одно и то же на всех плоскостях, содержащих эти точки.

Расстояние между точками A и B будем обозначать так же, как отрезок, — AB либо, когда важно подчеркнуть, что речь идёт не об отрезке, а о его длине, так: $|AB|$.

После того как выбран единичный отрезок, длина каждого отрезка выражается положительным числом. К этому числу приписывают название единичного отрезка: 3 см, 2,5 км и т. д. Если единичный отрезок не имеет названия, а длина отрезка AB равна, например, 7 единицам длины, то пишем $AB = 7$, что является сокращением записи $AB = 7$ ед. В дальнейшем мы считаем, что единичный отрезок фиксирован.

Аксиома расстояния позволяет сравнивать фигуры на разных плоскостях, в частности, применять теоремы о равенстве и подобии треугольников, расположенных в разных плоскостях.

Пользуясь понятием расстояния, можно определить равенство и подобие фигур в пространстве буквально так же, как это было сделано в планиметрии. Две **фигуры** называются **равными**, если существует соответствие между их точками, при котором расстояния между парами соответствующих точек равны.

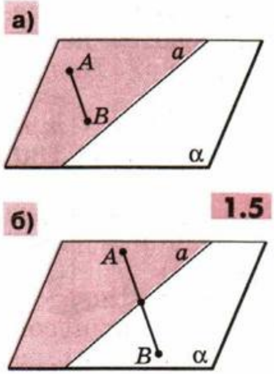


Рис. 12

1.5 **Аксиома разбиения пространства плоскостью.** Вспомним, что каждая прямая в плоскости делит её на две полуплоскости, для которых она служит общей границей. Полуплоскость, ограниченная прямой a, характеризуется следующими свойствами:

1) она содержит прямую a, но не совпадает с ней;

2) если обе точки A и B принадлежат полуплоскости, но не прямой a, то отрезок AB не имеет с a общих точек (рис. 12, *а*);

3) если же точка A принадлежит полуплоскости, а B ей не принадлежит, то отрезок AB имеет с прямой a общую точку (рис. 12, *б*).

Аналогично **полупространством, ограниченным плоскостью** α, называется фигура (обозначим её F) со следующими свойствами:

1) она содержит плоскость α, но не совпадает с ней;

2) если обе точки A и B принадлежат фигуре F, но не плоскости α, то отрезок AB не имеет с α общих точек (рис. 13, *а*);

3) если же точка A принадлежит фигуре F, а точка B нет, то отрезок AB имеет с плоскостью α общую точку (рис. 13, *б*).

Плоскость, ограничивающую полупространство, называют его **границей.**

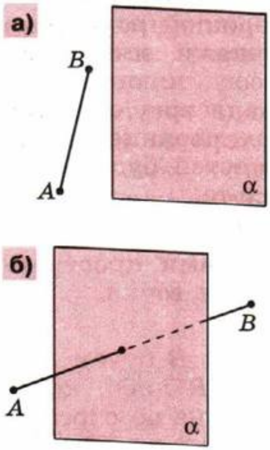


Рис. 13

Аксиома 5. Каждая плоскость разбивает пространство на два полупространства, для которых она является общей границей.

1.6 **Основные теоремы о треугольниках.** Мы определили плоскости как фигуры, на которых выполняется планиметрия, а потому для них имеют место все выводы планиметрии. Напомним важнейшие теоремы о треугольниках и решим, применяя их, несколько интересных задач. Одной из важных задач планиметрии является задача о *решении треугольников*, т. е. о выражении одних элементов треугольника через другие его элементы. *Решая треугольники*, опираются на четыре основные теоремы о треугольниках. Напомним их.

Во-первых, это *теорема о сумме углов треугольника*: **сумма углов треугольника равна 180°** (рис. 14).

Во-вторых, это *теорема Пифагора*: **квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов** (рис. 15).

В-третьих, это обобщение теоремы Пифагора (ОТП), которое называют теоремой косинусов: **в каждом треугольнике квадрат любой его стороны равен сумме квадратов двух других сторон треугольника минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними** (рис. 16).

Наконец, в-четвёртых, это *теорема синусов*: **в каждом треугольнике его стороны пропорциональны синусам противолежащих им углов** (рис. 17).

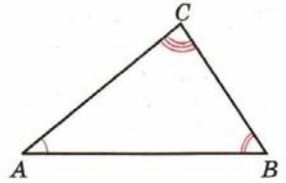
Напомним также, что **площадь треугольника равна половине произведения стороны треугольника и его высоты, проведённой к этой стороне** (рис. 18, *а*), и **площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними** (рис. 18, *б*), а также по формуле Герона

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}, \tag{1}$$

где a, b, c — стороны треугольника, $p = 0{,}5\,(a+b+c)$ — его полупериметр.

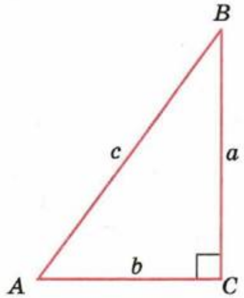
Решим теперь три задачи о треугольниках: зная три стороны треугольника, найдём его высоты, медианы и биссектрисы.

З а д а ч а 1: *вычисление высоты треугольника.* Решить эту задачу можно, опираясь на теорему



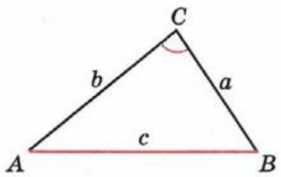
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Рис. 14



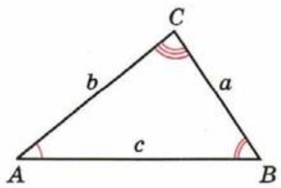
$a^2 + b^2 = c^2$

Рис. 15



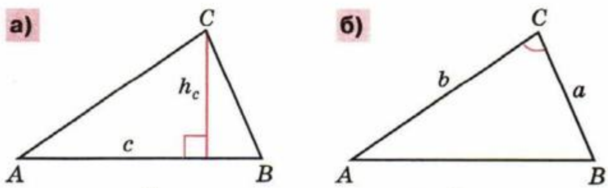
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Рис. 16



$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Рис. 17

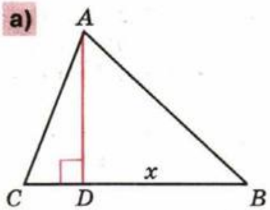


$S = \dfrac{1}{2}ch_c$ $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

Рис. 18

Пифагора. Пусть заданы стороны a, b, c треугольника ABC и требуется найти его высоты h_a, h_b, h_c. Например, пусть $a=8$, $b=7$, $c=9$. Как здесь быть? Теорема Пифагора позволяет решить такую задачу на вычисление. Пусть AD — искомая высота (рис. 19, *а*).

а)



б)

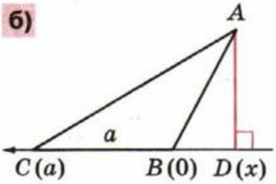


Рис. 19

Обозначим через x отрезок BD. Тогда

$$CD = 8 - x.$$

Так как $AD^2 = AB^2 - BD^2$ и $AD^2 = AC^2 - CD^2$, то $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$, т. е.

$$81 - x^2 = 49 - (8 - x)^2. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) получаем, что $x = 6$. Так как $BD = 6$, то $AD^2 = 81 - 36 = 45$, т. е. $AD = 3\sqrt{5}$.

Две другие высоты этого треугольника найдите самостоятельно.

* Если повторить проведённое нами решение в общем виде (т. е. в буквенных обозначениях) с тем же чертежом, то для отрезка x получим такое выражение:

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \qquad (3)$$

Если $a^2 + c^2 < b^2$, то по этой формуле $x < 0$. Что же это значит? Вспомним, что $CD = a - x$, и если $x < 0$, то $CD > a$! Это неравенство подсказывает нам, что точка B лежит внутри отрезка CD и угол B тупой (рис. 19, *б*). Объединить в решении все случаи расположения точки D на прямой BC можно так. Эту прямую считать числовой осью с началом в точке B, идущей от B к C. Точка C будет иметь координату a, точка D — координату x. Тогда

$$BD = |x|, \; CD = |a - x|$$

и уравнение относительно x будет иметь вид

$$c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2.$$

Решая его, получаем выражение (3) для x. А для высоты h_a получаем такую формулу:

$$h_a^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2}. \qquad (4)$$

Проверьте! ■

З а д а ч а 2: *вычисление медианы треугольника*. Пусть заданы стороны a, b, c треугольника ABC и требуется найти его медианы m_a, m_b, m_c.

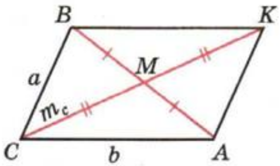


Рис. 20

Решая задачи о медиане треугольника, часто бывает полезно продлить её на равный ей отрезок и построить параллелограмм, в котором удвоенная медиана является диагональю. Например, продлим медиану $m_c = CM$ треугольника ABC на отрезок $MK = CM$ и рассмотрим параллелограмм $AKBC$ (рис. 20). В этом параллелограмме стороны равны a и b, диагональ $AB = c$ и диагональ $CK = 2m_c$. А для сторон и диагоналей параллелограмма имеет место следующая теорема: **сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.** Эта теорема — простое следствие ОТП. Докажем её для параллелограмма $AKBC$.

□ Согласно ОТП

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \text{ и } CK^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos A.$$

Так как $\angle A = 180° - \angle C$, то $\cos A = -\cos C$. Поэтому

$$AB^2 + CK^2 = 2\ (a^2 + b^2). \ \blacksquare \qquad (5)$$

Если теперь в (5) подставить $AB = c$ и $CK = 2m_c$, а затем выразить m_c, то для вычисления медианы m_c получим такую формулу:

$$m_c^2 = 0{,}5\ (a^2 + b^2) - 0{,}25c^2. \qquad (6)$$

Задача 3: *вычисление биссектрисы треугольника*. Чтобы решить задачу о вычислении биссектрисы треугольника, сначала докажем такое *свойство биссектрисы треугольника*: **биссектриса угла треугольника разбивает его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.**

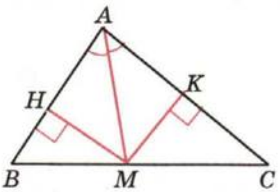


Рис. 21

□ Рассмотрим треугольник ABC. Проведём его биссектрису AM (рис. 21). Из точки M проведём высоты MH и MK треугольников ABM и ACM. Так как точка M равноудалена от лучей AB и AC, то $MH = MK$. Поэтому отношение площадей S_1 и S_2 треугольников ABM и ACM равно отношению их сторон AB и AC, т. е. $S_1 : S_2 = AB : AC$. С другой стороны, треугольники ABM и ACM имеют одну и ту же высоту — высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A. Поэтому $S_1 : S_2 = BM : CM$. Из этих двух равенств и следует, что $AB : AC = BM : CM$. ■

□ Переходим к вычислению биссектрисы CK треугольника ABC, стороны a, b, c которого из-

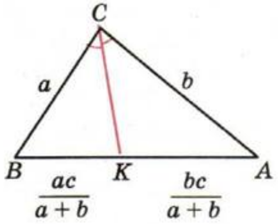


Рис. 22

вестны (рис. 22). Пусть $CK = x$. Используя свойство биссектрисы, получаем, что

$$AK = \frac{bc}{a+b} \text{ и } BK = \frac{ac}{a+b}.$$

Выражаем по ОТП равные друг другу косинусы углов ACK и BCK и приравниваем эти выражения. Получим

$$\frac{x^2 + b^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2}{bx} = \frac{x^2 + a^2 - \left(\frac{ac}{a+b}\right)^2}{ax}. \quad (7)$$

Выражая x^2 из равенства (7), получаем

$$x^2 = \frac{ab\,(a+b+c)\,(a+b-c)}{(a+b)^2}. \ \blacksquare \quad (8)$$

Решая задачи о вычислении высот, медиан и биссектрис треугольника, мы пока не использовали теорему синусов. Применим её (многократно!) для доказательства красивой теоремы, которую доказал в 1678 году итальянский математик Джованни Чева (1648—1734). Она формулируется так:

Теорема Чевы. **Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC, точка B_1 лежит на его стороне AC и точка C_1 лежит на стороне AB. Если отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через одну точку, то выполняется равенство**

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть три отрезка AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O (рис. 23). Докажем, что выполняется равенство (9). Введём такие обозначения: $\angle AOB_1 = \angle A_1OB = \alpha$, $\angle BOC_1 = \angle B_1OC = \beta$, $\angle COA_1 = \angle C_1OA = \gamma$. Обозначим значение синусов смежных углов OB_1A и OB_1C через k. Тогда, применяя теорему синусов к треугольникам OAB_1 и COB_1, получим

$$AB_1 = OA\,\frac{\sin\alpha}{k} \text{ и } B_1C = OC\,\frac{\sin\beta}{k}. \quad (10)$$

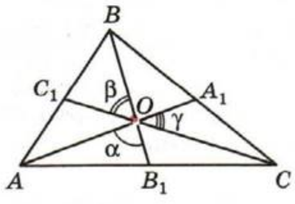


Рис. 23

Из равенств (10) следует, что

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{OA\sin\alpha}{OC\sin\beta}. \quad (11)$$

Рассуждая аналогично, получаем, что

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{OC\sin\gamma}{OB\sin\alpha} \text{ и } \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{OB\sin\beta}{OA\sin\gamma}. \qquad (12)$$

Из равенств (11) и (12) вытекает равенство (9). ■

Справедлива и теорема, обратная теореме Чевы:

Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC, точка B_1 лежит на его стороне AC и точка C_1 лежит на стороне AB. Если выполняется равенство (9), то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через одну точку.

□ Докажем это утверждение. Пусть выполнено равенство (9). Покажем, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 проходят через одну точку. Пусть точка O — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Проведём из точки C через точку O луч p. Пусть он пересекает сторону AB в точке C_2 (рис. 24). Тогда, как доказано,

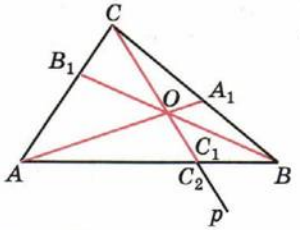


Рис. 24

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = 1. \qquad (13)$$

Из равенств (9) и (13) получаем, что

$$\frac{BC_2}{C_2A} = \frac{BC_1}{C_1A}. \qquad (14)$$

Следовательно, точки C_2 и C_1 делят отрезок BA в одном и том же отношении. Поэтому точки C_2 и C_1 совпадают. Итак, все три отрезка AA_1, BB_1, CC_1 проходят через точку O. ■

Получите как следствия обратной теоремы Чевы теоремы о точках пересечения медиан и биссектрис треугольника. А вот новая теорема: прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанного круга, пересекаются в одной точке (она называется *точкой Жергона*). Действительно, в этом случае $AB_1 = AC_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$ (рис. 25), откуда и следует равенство (9).

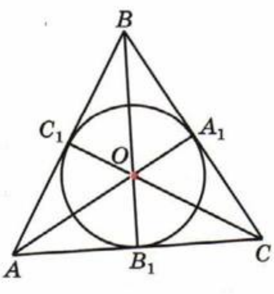


Рис. 25

Теорема Чевы допускает обобщение, в котором речь пойдёт о прямых, проходящих через вершины треугольника. Точка пересечения этих прямых может лежать вне треугольника. Чтобы получить такое обобщение, надо ввести отношение направленных отрезков, лежащих на одной прямой.

Рис. 26

Итак, будем понимать **отношение** $\frac{AC}{CB}$ **отрезков** AC и CB, лежащих на одной прямой (точка C отлична от B), как отношение их длин, если направленные отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ сонаправлены, и как такое же отношение, но со знаком «минус», если они направлены противоположно (рис. 26).

Теперь, если в равенстве (9) отношения отрезков понимать именно в таком смысле (со знаком), по теореме Чевы и обратной ей теореме можно дать обобщение.

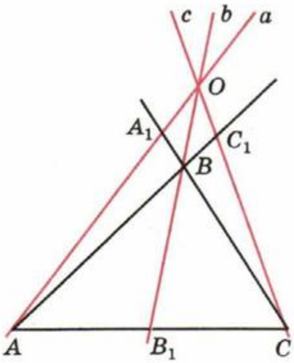


Рис. 27

Обобщённая теорема Чевы. *Пусть прямые a, b, c проходят через вершины A, B, C треугольника ABC и пересекают прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно* (рис. 27). *Тогда прямые a, b, c пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда имеет место равенство* (9).

Докажите её самостоятельно. Получите как следствие этой теоремы теорему об ортоцентре треугольника — точке пересечения прямых, содержащих высоты треугольника.

Этот пункт мы завершим ещё одной интересной теоремой геометрии треугольника — теоремой Менелая. Менелай Александрийский (I—II вв. н. э.) — греческий математик и астроном, один из создателей сферической тригонометрии. В этой теореме отношения отрезков тоже понимаются со знаком.

Теорема Менелая. **Пусть дан треугольник ABC, и точки C_1, B_1, A_1 принадлежат соответственно прямым AB, AC, BC. Тогда точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство**

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1. \qquad (15)$$

Доказательство. В этой теореме тоже два взаимно обратных утверждения. Докажем сначала, что если прямая l пересекает прямые BC, AC, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 28), то выполняется равенство (15). Проведём любую прямую p, пересекающую прямую l, и через точки A, B, C проведём соответственно прямые

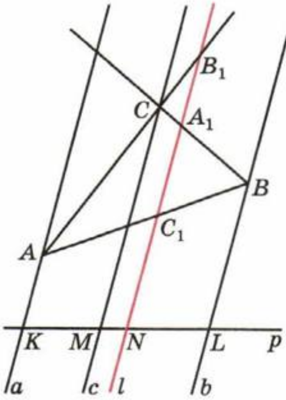


Рис. 28

$a \parallel l$, $b \parallel l$, $c \parallel l$. Прямые a, b, c, l пересекут прямую p в точках K, L, M, N. По известной теореме планиметрии параллельные прямые отсекают на двух прямых пропорциональные отрезки. Поэтому

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{KN}{NL}, \; \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{LN}{NM}, \; \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{MN}{NK}. \qquad (16)$$

Перемножая равенства (16) и учитывая, что $\frac{KN}{NK} = \frac{MN}{NM} = \frac{LN}{NL} = -1$, получаем равенство (15). Первое утверждение доказано. Обратное ему утверждение докажите самостоятельно тем же методом, что и при доказательстве теоремы Чевы. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите аксиомы, которые лежат в основе стереометрии.
2. Как могут быть расположены две плоскости в пространстве?
3. Какие могут быть случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве?
4. Как определяется равенство фигур в пространстве?
5. Что такое плоскость?
6. Две плоскости имеют общую точку A и общую прямую a. Объясните, почему точка A принадлежит прямой a.

Задачи

1.1. Дополняем теорию. Докажите, что существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Задачи к пп. 1.1—1.3

1.2. Приведите пример двух одинаковых поверхностей, которые имеют общую точку, но (в отличие от плоскостей) дают в пересечении фигуру, отличную от прямой. Постарайтесь сделать хороший рисунок.

1.3. Нарисуйте плоскость. Нарисуйте такую линию, которая имеет с ней две общие точки, но не лежит в ней.

1.4. Нарисуйте прямую. Нарисуйте такую поверхность, которая имеет с ней две общие точки, но не содержит прямую.

1.5. Ученик нарисовал сечения куба плоскостью (рис. 29 на с. 26). Есть ли ошибки на рисунке?

1.6. Ученик нарисовал сечения тетраэдра плоскостью (рис. 30 на с. 26). Есть ли ошибки на рисунке?

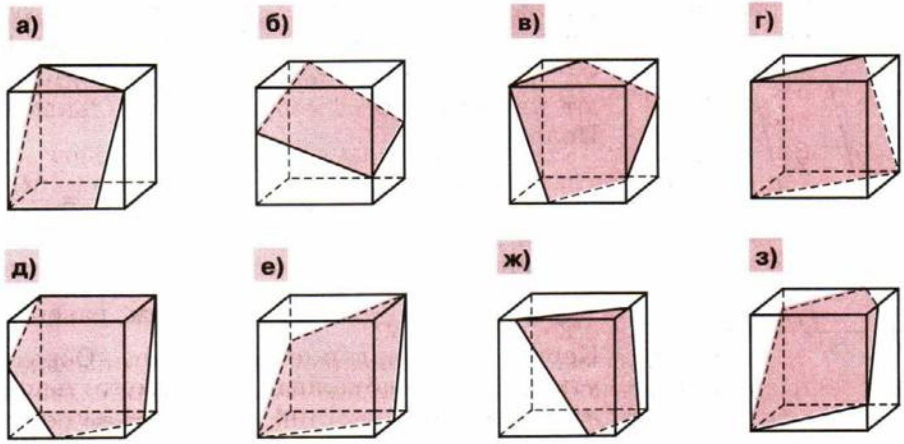


Рис. 29

Задачи к п. 1.4

1.7. Нарисуйте тетраэдр $PABC$. Укажите его грань, равную грани PAB, если: а) $PA = PB = PC$, $AB = BC = CA$; б) $PA = BC$, $PB = AC$, $PC = AB$; в) $PA = PB = AC$, $PC = AB = BC$. Выберите сами другую грань тетраэдра и найдите грань, равную ей.

1.8. Нарисуйте правильную треугольную пирамиду $PABC$. а) Из вершины P проведите медианы боковых граней. Докажите, что они равны. б) В гранях PAC и PBC из точек A и B проведите высоты. Докажите, что они попадут в одну точку ребра. в) Нарисуйте точку Q — центр основания ABC. Соедините её отрезками с точками P, A, B, C. Укажите на полученном рисунке все пары равных треугольников.

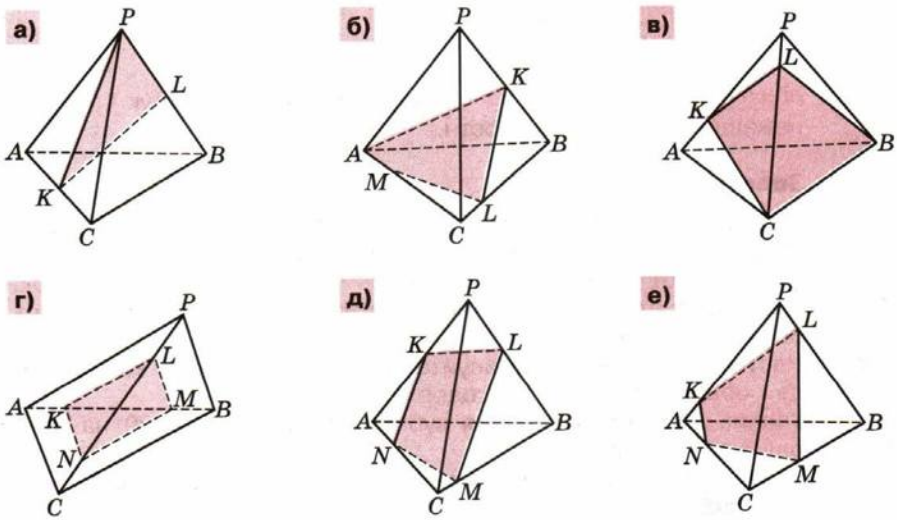


Рис. 30

1.9. Нарисуйте правильный тетраэдр $PABC$. Отметьте любую точку K внутри ребра PB. Нарисуйте треугольник ACK. а) Докажите, что он равнобедренный. б) Может ли он при некотором положении точки K быть равносторонним? в) Может ли он при некотором положении точки K быть прямоугольным?

1.10. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ все рёбра равны. Проведите AC и BD. Укажите пары равных треугольников.

1.11. Нарисуйте на поверхности куба, но не в одной его грани: а) равнобедренный треугольник; б) равносторонний треугольник; в) разносторонний треугольник.

Задачи к п. 1.5

1.12. а) Как одной плоскостью разбить тетраэдр на: два тетраэдра; один тетраэдр и один многогранник, не являющийся тетраэдром; два многогранника, не являющиеся тетраэдрами? б) На сколько частей можно разбить тетраэдр двумя плоскостями? Могут ли все они быть тетраэдрами? Сколько при этом можно получить тетраэдров?

1.13. Исследуем | Нарисуйте куб. а) На сколько частей его можно разбить двумя плоскостями? б) Сколько понадобится плоскостей, чтобы разбить его на одни только тетраэдры?

Задачи к п. 1.6

1.14. а) Пусть в треугольнике известны две стороны и угол между ними. Как найти биссектрису этого угла? б) Проведите вычисления для прямоугольного треугольника с катетами 2 и 3 и биссектрисы прямого угла.

1.15. Известны стороны треугольника. Как найти отношение отрезков, в котором биссектрисы делятся точкой своего пересечения?

1.16. В треугольнике с известными сторонами проведена медиана. Как найти углы, которые она образует со сторонами треугольника?

1.17. Как найти неизвестную сторону треугольника, если известны две его стороны и медиана на третью сторону?

1.18. Докажите, что треугольник с двумя равными биссектрисами — равнобедренный.

1.19. Пусть в треугольнике ABC известно: $AC=b$, $BC=a$, $\angle ACB=\gamma$. а) Докажите, что его биссектриса $CL = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$. б) Какие следствия можно получить из этой формулы?

1.20. Пусть a, b, c — стороны треугольника. а) Докажите, что $a=b\cos C+c\cos B$. б) Докажите аналогичные формулы для других сторон треугольника. в) Исходя из полученных формул, докажите неравенство треугольника, теорему косинуса.

1.21. Исследуем | Пусть известно, в каком отношении делятся две биссектрисы треугольника их общей точкой. Можно ли найти углы треугольника?

1.22. Исследуем | Пусть биссектрисы треугольника, пересекаясь, делят друг друга в отношении 2 : 1, считая от вершины. Является ли такой треугольник равносторонним?

1.23. **Исследуем** Можно ли найти площадь треугольника, зная его медианы? Если можно, то попытайтесь получить соответствующую формулу.

1.24. **Исследуем** Исследуя соотношение между стороной треугольника и проведённой к ней медианой, можно установить вид треугольника по его углам. Каким образом?

1.25. **Исследуем** В треугольнике ABC проведены хорды BM и AN, которые пересекаются в точке O. а) Площади треугольников AOM, AOB и BON равны S_1, S_2, S_3 соответственно. Сможете ли вы найти площадь данного треугольника? б) Пусть теперь известны S_1 и S_3, а кроме того, известно, что площадь треугольника AOB равна площади четырёхугольника $CMON$. Сможете ли вы найти площадь данного треугольника?

1.26. Каждая сторона треугольника меньше 1. В каких границах лежит его площадь?

1.27. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N, такие, что $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA} = \frac{p}{q}$. В каком отношении точка K пересечения отрезков BN и CM делит каждый из этих отрезков?

§ 2 Способы задания прямых и плоскостей в пространстве

Здесь из принятых нами аксиом стереометрии мы получим важные теоремы и следствия о прямых и плоскостях. Сами по себе они достаточно очевидны. Рассмотрим их доказательства, которые показывают, как какое-либо утверждение можно строго вывести из аксиом со всеми необходимыми ссылками.

2.1 Задание прямой двумя точками

Теорема 1. Через любые две точки пространства проходит прямая, и притом только одна.

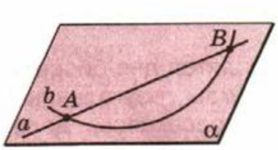


Рис. 31

Доказательство. В п. 1.1 уже доказано, что через каждые две точки A, B проходит прямая a.

Докажем, что эта прямая только одна. Прямая a лежит в некоторой плоскости α. Допустим, что, кроме прямой a, через точки A, B проходит ещё прямая b (рис. 31). По аксиоме 3 прямая, имеющая с плоскостью две общие точки, лежит в этой плоскости. Так как прямая b имеет с α общие точки A и B, то b лежит в плоскости α.

Но в плоскости α выполняется планиметрия, и, следовательно, через две точки A и B проходит только одна прямая. Значит, прямые a и b совпадают. Таким образом, через точки A и B проходит только одна прямая. ■

Следствие. В пространстве (как и на плоскости) две различные прямые не могут иметь более одной общей точки.

Две прямые, имеющие единственную общую точку, называются **пересекающимися**.

Замечание. Не всегда предложение, справедливое в планиметрии, верно и в стереометрии. Так, например, в плоскости через две данные точки N, S проходит лишь одна окружность с диаметром NS, а в пространстве таких окружностей бесконечное множество — в каждой плоскости, проходящей через точки N, S, лежит такая окружность (рис. 32, *а*).

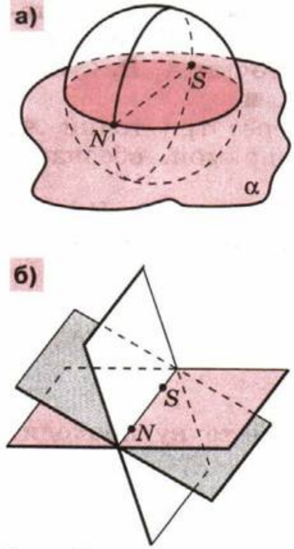


Рис. 32

Но прямая, проходящая через точки N, S в пространстве, лишь одна. Эта общая прямая всех плоскостей, проходящих через точки N, S (рис. 32, *б*).

Доказав, что в пространстве через каждые две точки проходит единственная прямая, мы можем задавать прямую в пространстве любой парой её точек, не заботясь о том, в какой плоскости эта прямая лежит. Прямая, проходящая через точки A, B, обозначается (AB).

Аналогичное верно и для отрезков: *каждые две точки в пространстве служат концами единственного отрезка.*

2.2 Задание плоскости тремя точками

Теорема 2. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство. Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме плоскости через эти точки проходит некоторая плоскость α (см. рис. 6). Докажем, что она только одна.

Допустим, что через точки A, B, C проходит ещё одна плоскость β, отличная от α. Плоскости α и β имеют общие точки (например, точку A). По аксиоме 2 пересечением плоскостей α и β является их общая прямая. На этой прямой лежат все общие точки плоскостей α и β, а значит, точки A, B, C. Но это противоречит условию теоремы, так как согласно ему A, B, C не лежат на одной прямой. Итак, через точки A, B, C проходит лишь одна плоскость α. ■

Плоскость, проходящую через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, обозначают (ABC).

Легко проиллюстрировать теорему 2. Например, положение двери фиксируется двумя дверными петлями и замком.

2.3 Задание плоскости прямой и точкой и двумя прямыми

Теорема 3. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

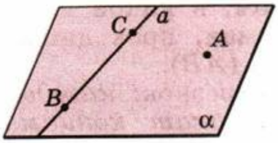


Рис. 33

Доказательство. Пусть даны прямая a и не лежащая на ней точка A. Возьмём на прямой a две точки B и C (рис. 33). Точка A не лежит с ними на одной прямой, так как через точки B и C проходит лишь одна прямая — это прямая a, а точка A не лежит на ней по условию теоремы.

Через точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит (по теореме 2) единственная плоскость ABC. Прямая a имеет с ней две общие точки B и C и, значит, по аксиоме 3 лежит в ней. Таким образом, плоскость ABC и есть плоскость, проходящая через прямую a и точку A.

Единственность такой плоскости докажем способом от противного.

Пусть есть ещё одна плоскость β, содержащая прямую a и точку A. Тогда она содержит точки B и C. По теореме 2 она должна совпадать с плоскостью ABC. Полученное противоречие и доказывает единственность. ■

Вот иллюстрация этой теоремы: поворачивая переплёт книги, вы в каждый момент пальцами фиксируете его положение.

Теорема 4. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются в точке A. Возьмём на прямой b другую точку B (рис. 34). По теореме 3 через прямую

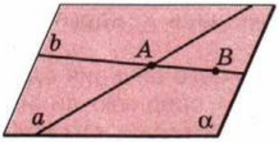


Рис. 34

a и точку B проходит плоскость α. Согласно аксиоме 3 прямая b лежит в этой плоскости, так как имеет с ней две общие точки A и B. Значит, плоскость α проходит через прямые a и b. Единственность такой плоскости докажите самостоятельно способом от противного. ■

Теперь мы знаем три способа задания плоскости:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
2) прямой и не лежащей на ней точкой;
3) двумя пересекающимися прямыми.

Вопросы для самоконтроля

1 Какие вы знаете способы задания прямой в пространстве?
2 Какие вы знаете способы задания плоскости?

Задачи

2.1. Дополняем теорию | Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой p и в плоскости α лежит прямая a, отличная от p. Докажите, что: а) если a пересекает p, то a пересекает β; б) обратно: если a пересекает β, то a пересекает p.

2.2. Дополняем теорию | Докажите, что через прямую проходит бесконечно много плоскостей.

2.3. Пусть $PABC$ — тетраэдр. Нарисуйте его сечение плоскостью: а) APX, где точка X лежит внутри ребра BC; б) PXY, где точка X лежит внутри ребра AB, а точка Y — внутри ребра AC; в) AXY, где точка X лежит внутри ребра PB, а точка Y — внутри ребра BC; г) XYZ, где точка X лежит внутри ребра AC, точка Y — внутри ребра CB, точка Z — внутри ребра CP.

2.4. Пусть $PABC$ — тетраэдр. Выберите точку K внутри PA, точку L внутри PB, точку M внутри BC так, что (KL) пересекает (AB), (LM) пересекает (PC). Нарисуйте: а) точку пересечения (KL) и (ABC); б) прямую, по которой (ABC) пересекает (KLM); в) точку пересечения (LM) и (APC); г) прямую, по которой (KLM) пересекает (APC); д) точку пересечения (AC) и (KLM); е) сечение тетраэдра $PABC$ плоскостью KLM.

2.5. Нарисуйте сечение тетраэдра $PABC$ плоскостью XYZ, если: а) X — точка внутри ребра PA, Y — внутри PC, Z — внутри AB; б) X — точка внутри ребра PB, Y — внутри AC, Z — внутри AB; в) X — точка внутри ребра PA, Y — внутри PB, Z — внутри BC.

2.6. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр, A_1 — центр грани BCD, B_1 — центр грани ACD, C_1 — центр грани ABD, D_1 — центр грани ABC. Нарисуйте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через: а) (AD) и (DD_1); б) (AC) и (AA_1); в) (AC) и (CC_1); г)* (DD_1) и (BB_1).

2.7. Нарисуйте сечение правильного тетраэдра $PABC$ с ребром 3, проходящее через: а) PB и середину AC — точку K; б) KB и середину PA — точку L; в) KL и середину AB — точку M. Вычислите площадь каждого сечения.

2.8. **Исследуем** Нарисуйте тетраэдр. Установите форму его сечения плоскостью, которая проходит через: а) боковое ребро; б) среднюю линию основания; в) вершину и точку внутри противоположной грани; г) середины двух противоположных рёбер.

§ 3 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

3.1 **Три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве.** Две прямые на плоскости параллельны или пересекаются — третьей возможности для них нет. В пространстве же к этим двум случаям добавляется ещё один — когда две прямые не лежат в одной плоскости. Такие прямые существуют. Возьмём, например, четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости (задача 1.1). Тогда прямые AB и CD (рис. 35) не лежат в одной плоскости (так как иначе точки A, B, C, D лежали бы в одной плоскости).

Итак, для взаимного расположения двух прямых в пространстве возможны такие случаи:

1. Прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек — **параллельные** прямые (рис. 36, *а*).

2. Прямые лежат в одной плоскости и имеют общую точку — пересекающиеся прямые (рис. 36, *б*).

3. Прямые не лежат ни в одной плоскости. Такие прямые называются **скрещивающимися** (рис. 36, *в*).

Эти же три случая можно получить иначе.

1. Прямые имеют общую точку. Тогда они лежат в одной плоскости. Это пересекающиеся прямые.

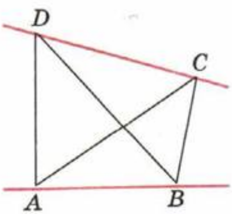


Рис. 35

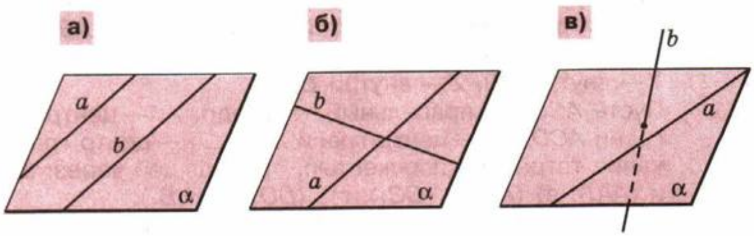


Рис. 36

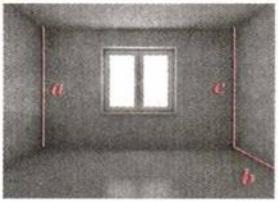


Рис. 37

2. Две прямые не имеют общих точек. Тогда они либо параллельны (если лежат в одной плоскости), либо скрещиваются (если не лежат в одной плоскости).

Все три случая можно видеть на примере прямых, по которым встречаются стены и потолок комнаты (рис. 37): например, a скрещивается с b и параллельна c, а b и c — пересекаются.

Отметим, что *параллельные прямые задают плоскость, в которой они лежат.*

3.2 Признаки скрещивающихся прямых.

3.2 Признаки скрещивающихся прямых. Указав в п. 3.1 пример двух скрещивающихся прямых AB и CD, мы фактически воспользовались следующим признаком скрещивающихся прямых:

1. *Если две прямые содержат четыре точки, не лежащие в одной плоскости, то они скрещиваются.*

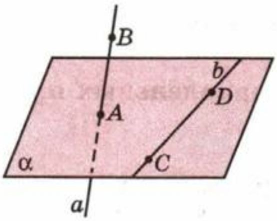


Рис. 38

Отсюда легко выводится второй признак скрещивающихся прямых:

2. *Прямая, лежащая в плоскости, скрещивается с каждой прямой, пересекающей эту плоскость, но не данную прямую.*

Доказательство. Пусть прямая a пересекает плоскость α в точке A, но не пересекает прямую b, лежащую в плоскости α (рис. 38). Возьмём на прямой a ещё точку B, а на прямой b две точки C и D. Четыре точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, а потому прямые a и b скрещиваются. ■

3.3 Параллельные прямые. Для параллельных прямых в пространстве выполняется, как и на плоскости, следующее утверждение:

Теорема 5. Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

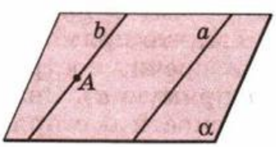


Рис. 39

Доказательство. Пусть даны прямая a и не лежащая на ней точка A. По теореме 3 через них проходит плоскость; обозначим её α. В плоскости α выполняются все положения планиметрии, а потому в ней через точку A проходит прямая b, параллельная a (рис. 39). Докажем, что другой прямой, параллельной a и проходящей через ту же точку A, нет.

Действительно, такая прямая по определению параллельных прямых должна лежать с прямой a в одной плоскости. Кроме того, она должна проходить через точку A. Значит, она должна лежать в плоскости, проходящей через прямую a и точку A.

Такая плоскость по теореме 3 только одна — это плоскость α.

Но в плоскости, как известно, через данную точку A проходит только одна прямая, параллельная данной прямой a, — это и есть прямая b. Следовательно, в пространстве через точку A проходит только одна прямая, параллельная данной прямой a. ■

Как и на плоскости, в пространстве **две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.** Чтобы доказать этот *признак параллельности прямых*, докажем сначала такую лемму:

Лемма. Если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую из них.

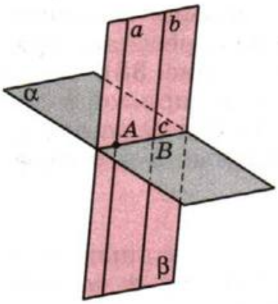


Рис. 40

□ Пусть прямые a и b параллельны и плоскость α пересекает прямую a в точке A (рис. 40). Проведём плоскость β через параллельные прямые a и b. Плоскости α и β имеют общую точку A, а потому пересекаются по прямой c, проходящей через точку A. Прямая a пересекает прямую c в точке A. Поэтому в плоскости β и параллельная ей прямая b пересекает прямую c в некоторой точке B. В точке B прямая b пересекает и плоскость α. ■

Докажем признак параллельности прямых.

□ Пусть две прямые a и b параллельны прямой c. Докажем, что $a \parallel b$. Возьмём на прямой b некоторую точку B и проведём плоскость α через точку B и прямую a. Тогда прямая b также лежит в плоскости α. Если бы прямая b пересекала плоскость α (в точке B), то по лемме эту плоскость пересекала бы и параллельная ей прямая c. Если же снова применить лемму к параллельным прямым a и c, то получим, что прямая a пересекает плоскость α, что противоречит построению плоскости α (она содержит прямую a). Значит, прямая b лежит в одной плоскости α с прямой a. Пересекаться прямые a и b не могут (по теореме 5). Поэтому прямые a и b параллельны. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Как могут располагаться две прямые в пространстве?
2. В чём сходство параллельных и скрещивающихся прямых? А в чём их различие? Какие вы знаете признаки скрещивающихся прямых?
3. Две прямые пересекают третью. Как могут располагаться первые две прямые?
4. Прямые a и b параллельны. Как располагаются прямые a и c, если: а) c пересекает b; б) c скрещивается с b?

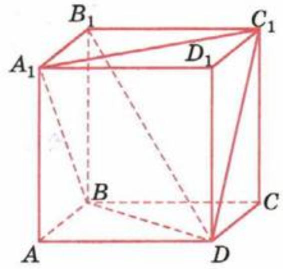


Рис. 41

Задачи

3.1. Дополняем теорию | Прямая a лежит в плоскости α, прямая b параллельна прямой a и имеет общую точку с α. Докажите, что прямая b лежит в плоскости α.

3.2. Дополняем теорию | Докажите, что две параллельные прямые лежат в единственной плоскости.

3.3. Дополняем теорию | Докажите такие свойства параллелепипеда: а) для каждого его ребра есть три ему параллельных; б) каждое его сечение, проходящее через два параллельных ребра, является параллелограммом; в) для каждой диагонали его грани найдётся ей параллельная и равная диагональ в другой грани; г) все его диагонали имеют общую точку и этой точкой делятся пополам.

3.4. В правильном тетраэдре $PABC$ отметьте точку K на ребре PB. Нарисуйте отрезок в этом тетраэдре, проходящий через точку K и параллельный: а) AB; б) BC; в) PA; г) PC; д) BB_1, где B_1 — середина AC; е) PQ, где Q — центр основания ABC. Какой из этих отрезков самый длинный? самый короткий?

3.5. На рисунке 41 укажите скрещивающиеся прямые, проходящие через: а) рёбра куба; б) диагонали граней и диагональ куба.

3.6. Нарисуйте тетраэдр $PABC$. Точка K — середина ребра PA, точка L — середина ребра AB, точка M — середина ребра BC, точка N — середина ребра PC, точка O — середина ребра PB, точка T — середина ребра AC. Установите взаимное расположение следующих прямых: а) KL и MO; б) KN и LO; в) AO и KL; г) KM и CO; д) MO и PC; **е)** KL и MN; **ж)** KM и TO.

3.7. Исследуем | Известно, что в тетраэдре $PABC$ точка K — середина ребра PA, точка L — середина ребра PB, точка M — середина ребра BC, точка N — середина ребра AC. а) Докажите, что $KN \parallel LM$. б) Установите вид четырёхугольника $KLMN$. в) Докажите, что отрезки KM и LN пересекаются в их общей середине. г)* Какой вид будет иметь четырёхугольник $KLMN$, если $PABC$ — правильная треугольная пирамида? правильный тетраэдр?

§ 4 Параллельное и центральное проектирования

4.1 Определение и основные свойства параллельного проектирования. Параллельным проектированием пользуются, например, при изображении на плоскости (скажем, на бумаге) фигур, расположенных в пространстве. Определяется оно так. Пусть даны плоскость α и пересекающая её прямая a. Возьмём в пространстве произвольную точку X. В том случае, когда точка X не лежит на прямой a, через X проводим прямую a', параллельную прямой a (рис. 42). Прямая a' пересекает плоскость α в некоторой точке X'. Эта точка называется **параллельной проекцией (на плоскость α) точки X при проектировании в направлении прямой a**. Если же точка X лежит на прямой a, то её параллельной проекцией X' называется точка, в которой a пересекает α.

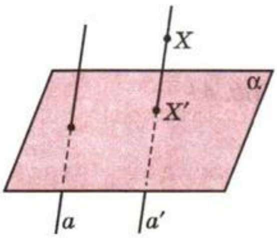


Рис. 42

О прямой a говорят, что она задаёт **направление проектирования**. При замене прямой a любой другой параллельной ей прямой направление проектирования не изменится (поскольку две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны).

Проекцией фигуры F называется фигура F', состоящая из проекций всех точек фигуры F. Параллельную проекцию реальной фигуры представляет, например, её тень, падающая на плоскую поверхность при солнечном освещении, поскольку солнечные лучи можно считать параллельными (рис. 43). Перед вами картина И. И. Шишкина «Сосны, освещённые солнцем». Так, глядя на свою тень на земле, вы видите свою параллельную проекцию.


Рис. 43

Выполняя параллельное проектирование, мы каждой точке фигуры F сопоставляли некоторую точку на плоскости α, т. е. выполняли некоторое *преобразование фигуры F в фигуру F'*. Напомним, что вообще **преобразование некоторой фигуры** F состоит в том, что каждой её точке X сопоставляется некоторая точка X' (рис. 44). Все точки X' образуют некоторую фигуру F', и говорят, что **фигура F преобразуется в фигуру F'**. Говорят также, что точка X' является **образом точки** X, а фигура F' — **образом фигуры** F

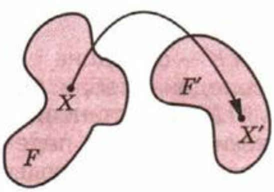


Рис. 44

для данного преобразования. Мы будем рассматривать различные преобразования фигур — проектирования, симметрии, движения, подобия.

Мы уже пользуемся параллельным проектированием при изображении пространственных фигур на плоскости и опираемся на его свойства для изображения отрезков и прямых, не параллельных направлению проектирования. Сформулируем и докажем их.

Свойство 1. Проекцией прямой является прямая, а проекцией отрезка — отрезок.

Свойство 2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

Свойство 3. Отношение проекций отрезков, лежащих на одной прямой, равно отношению самих отрезков.

Доказательство*. Пусть α — плоскость проекции и прямая a задаёт направление проектирования.

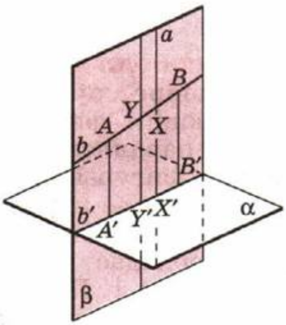


Рис. 45

1. Рассмотрим какую-либо прямую b, не параллельную прямой a. Так как a можно заменить любой параллельной ей прямой, то можно считать, что a пересекает b. Тогда через прямые a и b проходит плоскость β. Она пересекает плоскость α по некоторой прямой b'. Прямая b' и будет проекцией прямой b (рис. 45).

В самом деле, проекцией каждой точки $X \in b$ будет некоторая точка $X' \in b'$ и каждая точка $Y' \in b'$ является проекцией некоторой точки $Y \in b$. Это так, поскольку все проектирующие прямые, пересекающие прямую b (прямую b'), находятся в плоскости β, а значит, пересекают прямую b' (прямую b).

Любой отрезок AB, лежащий на прямой b, проектируется в отрезок $A'B'$ прямой b', где A' и B' — проекции точек A и B. Действительно, проектирующая прямая a, проходящая через любую внутреннюю точку X отрезка AB, идёт между проектирующими прямыми, проходящими через A и B. Поэтому и точка X' лежит между A' и B', т. е. на отрезке $A'B'$. Когда X пробегает отрезок AB, точка X' пробегает отрезок $A'B'$.

2. Пусть теперь даны две параллельные прямые b и c. Возможны два случая. а) Некоторая проектирующая прямая $p \parallel a$ пересекает и прямую b, и прямую c. Тогда эта прямая p лежит в плоскости β, содержащей прямые b и c. В этом случае и все другие проектирующие прямые, ко-

торые лежат в плоскости β, пересекают и b, и c, а потому проекцией этих прямых в направлении a на плоскость α является прямая пересечения плоскостей α и β. б) Не существует проектирующих прямых, пересекающих одновременно и b, и c. В этом случае проекции прямых b и c на плоскость α — прямые b' и c' — не имеют общих точек, т. е. параллельны (рис. 46, *а*).

3. Рассмотрим два отрезка AB и CD, лежащие на прямой b. Проекции $A'B'$ и $C'D'$ отрезков AB и CD лежат на прямой b' (рис. 46, *б*). Проектирующие прямые, проходящие через точки A, B, C, D, параллельны прямой a и, стало быть, параллельны друг другу. Кроме того, они все лежат в плоскости β. По известной теореме планиметрии параллельные прямые отсекают на двух прямых пропорциональные отрезки. Значит, $AB : CD = A'B' : C'D'$.

Все три свойства доказаны. ■

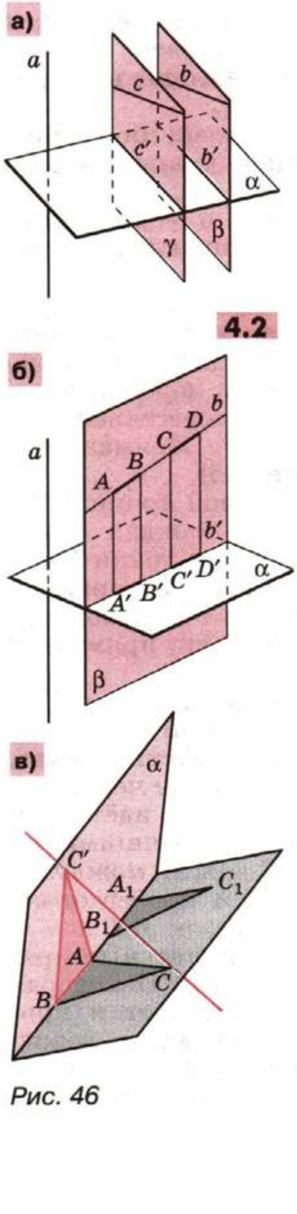


Рис. 46

4.2 Изображение разных фигур в параллельной проекции. Рисунки, иллюстрирующие предложения стереометрии и представляющие фигуры в пространстве, делают обычно в параллельной проекции. Точнее, за изображение фигуры принимается фигура, подобная какой-либо её параллельной проекции. Фигура, подобная параллельной проекции фигуры, очевидно, обладает теми же свойствами, которые доказаны в п. 4.1. Поэтому, делая рисунки, надо следить за тем, чтобы выполнялись эти свойства.

Рассмотрим изображения некоторых фигур. Случай, когда фигура лежит в плоскости, заполненной проектирующими прямыми, и, следовательно, проектируется в фигуру, лежащую на прямой, исключаем.

1. Треугольник. Каждый треугольник можно параллельно спроектировать так, что в проекции получится треугольник любого вида, т. е. подобный любому заданному треугольнику.

Действительно, пусть даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Проведём через прямую AB плоскость α, пересекающую плоскость треугольника ABC. На ней построим треугольник ABC', подобный треугольнику $A_1B_1C_1$, прилегающий к треугольнику ABC по стороне AB (рис. 46, *в*). Тогда при проектировании на плоскость α параллельно прямой CC' треугольник ABC спроектиру-

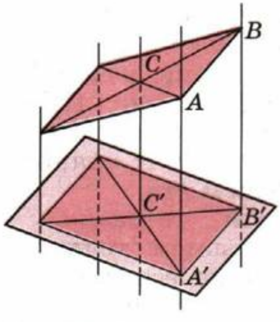


Рис. 47

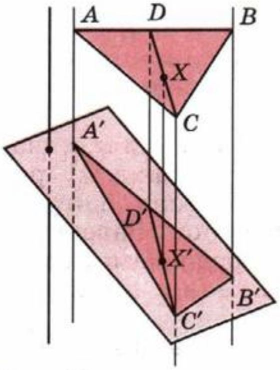


Рис. 48

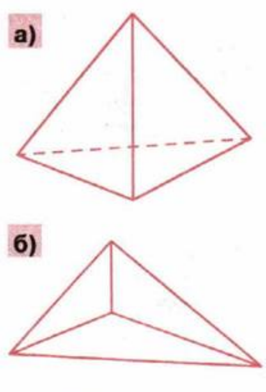


Рис. 49

ется на треугольник ABC' так, что его проекция будет подобна треугольнику $A_1B_1C_1$. В частности, всякий треугольник можно спроектировать так, чтобы получился равносторонний треугольник.

2. Параллелограмм. Изображением параллелограмма может служить любой параллелограмм. (Почему? Какая связь с изображением треугольника?)

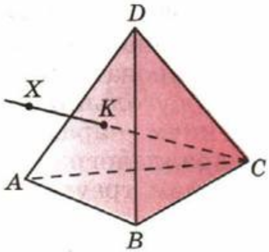
3. Изображение плоской фигуры. Для изображения плоской фигуры можно поступить так. В данной фигуре выделяют какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и строят треугольник с вершинами в этих точках; обозначим их A, B, C (рис. 47). Строят изображение треугольника ABC в виде произвольного треугольника $A'B'C'$. После того как построено это изображение, никакого произвола в изображении фигуры быть не может. Покажем это.

Пусть изображением треугольника ABC служит треугольник $A'B'C'$ (рис. 48). Пусть точка X лежит в плоскости ABC и луч CX пересекает отрезок AB во внутренней его точке D. Проекция точки D — точка D' — лежит на отрезке $A'B'$ (откуда это следует?), и $\frac{A'D'}{D'B'} = \frac{AD}{DB}$.

Следовательно, точку D' на отрезке $A'B'$ можно построить на рисунке (как?). Далее проводим луч $C'D'$ и на нём отмечаем такую точку X', что $\frac{C'X'}{C'D'} = \frac{CX}{CD}$ (объясните, как это сделать). Мы построили на рисунке проекцию данной точки X плоскости ABC. (Точка X может располагаться и по-иному относительно треугольника ABC, но и тогда построение будет аналогичным.)

4. Тетраэдр. Изображать тетраэдр можно любым по форме четырёхугольником с диагоналями. Эту трудную теорему доказали в середине XIX века два немецких геометра Карл Польке и Герман Шварц. Чаще всего тетраэдр рисуют так, как он изображён на рисунке 49, *а* (штриховой линией выделяется невидимое ребро). Но можно его изобразить и так, как на рисунке 49, *б*: это правильно, но менее наглядно.

5. Изображение пространственной фигуры. При изображении пространственной фигуры роль изображения тетраэдра аналогична роли изображения треугольника при изображении плоской



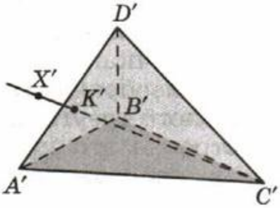


Рис. 50

фигуры. Изображая пространственную фигуру, в ней выделяют сначала четыре точки, не лежащие в одной плоскости, т. е. вершины некоторого тетраэдра, и строят его изображение. После того как построено изображение этого тетраэдра, никакого произвола в изображении точек данной фигуры быть не должно. Покажем это.

Пусть $ABCD$ — выделенный тетраэдр, а $A'B'C'D'$ — его изображение. Возьмём точку X данной фигуры, и пусть луч CX пересекает плоскость ABD в точке K внутри треугольника ABD (рис. 50). Изображение точки K — точка K' лежит внутри треугольника $A'B'D'$ (откуда это следует?), причём она может быть построена (мы показали это в примере 3). Но тогда изображение X' точки X лежит на луче $C'K'$, причём $\frac{K'X'}{C'K'} = \frac{KX}{CK}$.

Точка X может располагаться по-иному относительно тетраэдра, но и тогда рассуждение будет аналогичным.

Вообще же, как вы уже поняли, глядя, например, на рисунок 29, далеко не каждому рисунку соответствует пространственная фигура, которую изображает данный рисунок. Завершим этот пункт тремя известными парадоксами, основанными на неверном изображении пространственных объектов (рис. 51—52).

Какие из правил изображения в них нарушены?

4.3 **Центральное проектирование.** В курсах геометрии для изображения на плоскости чертежа или рисунка пространственных фигур применяется параллельное проектирование. Но в живописи, архитектуре и при фотографировании используется другой вид проектирования на плоскость — центральное проектирование. Его свойства слож-

Рис. 51

а)

б)

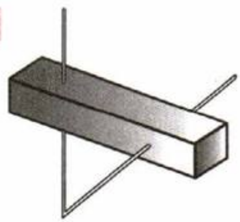


Рис. 52

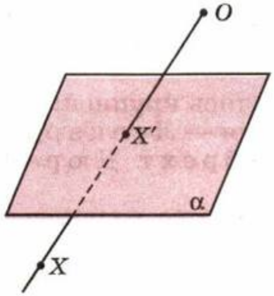


Рис. 53

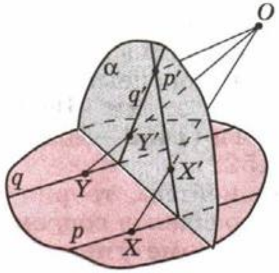


Рис. 54

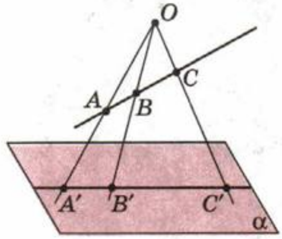


Рис. 55

нее свойств параллельного проектирования, но оно даёт большую наглядность изображению.

Центральное проектирование на плоскость определяется так. В пространстве фиксируется некоторая точка O (*центр проектирования*) и плоскость α (*плоскость проекций*), не проходящая через O. Через любую точку X проводится прямая OX — проектирующая прямая.

Если прямая OX пересекает α, то точка X' их пересечения называется *центральной проекцией точки X на плоскость α из точки O* (рис. 53).

Из данного определения следует, что не каждая точка пространства проектируется из центра O в некоторую точку плоскости α: если прямая OX параллельна α, то точки X' нет (в то время как при параллельном проектировании все точки имеют проекции).

Центральное проектирование не сохраняет параллельности прямых (рис. 54; вспомните, что, когда мы смотрим вдаль на параллельные рельсы, нам кажется, что они пересекаются на линии горизонта).

Легко понять, что и отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, не параллельной плоскости проекций, не сохраняется при центральном проектировании (рис. 55).

Примерами фигур, получающихся друг из друга при центральном проектировании, являются сечения одного конуса разными плоскостями (см. рис. 162, *б*, 164, *а*, 165, *в*, 167, 168).

Изображение пространственных фигур на плоскости с помощью центрального проектирования называется **перспективой**. Теория перспективы возникла из потребностей архитектуры и живописи. Некоторые законы перспективы

Леонардо да Винчи

Альбрехт Дюрер

были известны ещё древнегреческим геометрам: Аполлонию Пергскому (III в. до н. э.), Менелаю (I в.), Паппу (III в.).

Теорией перспективы занимались крупнейшие художники эпохи Возрождения — Леонардо да Винчи (1452—1519) и Альбрехт Дюрер (1471—1528).

В дальнейшем теория перспективы развилась в один из разделов современной геометрии — **проективную геометрию** — учение о свойствах фигур, сохраняющихся при центральном проектировании.

Основы её заложил французский математик Жерар Дезарг (1591—1661). Он ввёл так называемые **бесконечно удалённые элементы.** Дезарг считал, что все параллельные друг другу прямые пересекаются в одной **бесконечно удалённой точке,** а все бесконечно удалённые точки одной плоскости лежат на одной **бесконечно удалённой прямой.**

Окончательно проективная геометрия оформилась как самостоятельная область геометрии в работах французского геометра Жана Виктора Понселе (1788—1867). (Ж.-В. Понселе был офицером наполеоновской армии и свой основной труд «Трактат о проективных свойствах фигур», вышедший в 1822 г., написал в 1813—1814 гг. в Саратове, находясь в русском плену.)

Задачи

4.1. Какие из фигур на рисунке 56 являются параллельными проекциями куба?

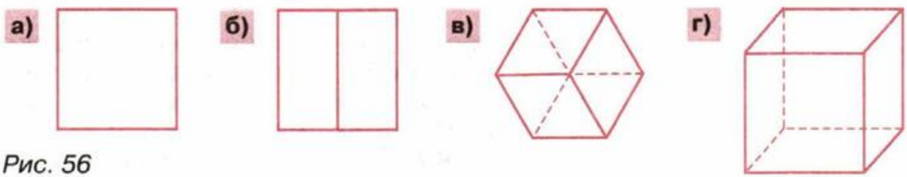


Рис. 56

4.2. Нарисуйте параллельную проекцию равностороннего треугольника, а в нём среднюю линию, радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности.

4.3. Нарисуйте параллельную проекцию квадрата, а в нём радиус описанной и радиус вписанной окружностей.

4.4. Нарисуйте параллельную проекцию прямоугольника, а в нём две оси симметрии.

4.5. Нарисуйте параллельную проекцию фигуры, являющейся объединением квадрата и равностороннего треугольника, имеющих общую сторону.

4.6. Нарисуйте параллельную проекцию правильного шестиугольника.

4.7. Исследуем. Может ли: а) параллельная проекция равностороннего треугольника быть прямоугольным треугольником; б) параллельная проекция угла в 20° быть углом величиной 21°?

4.8. На рисунке 57 изображены параллельные проекции четырёхугольной пирамиды. Нарисуйте пирамиду, плоскость проекции и направление проектирования.

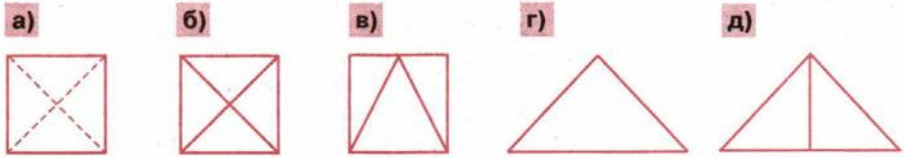


Рис. 57

4.9. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, чтобы его грань $ABCD$ была горизонтальной нижней гранью, а грань BAA_1B_1 была передней гранью. Нарисуйте центральную проекцию этого куба на плоскость грани $ABCD$ из точки P, которая лежит на прямой AA_1: а) внутри отрезка AA_1; б) выше точки A_1; в) ниже точки A. Аналогичные рисунки сделайте для точки P, лежащей на прямой, которая проходит через центры нижней и верхней граней куба.

§ 5 Существование и единственность. Построения

5.1 **Существование и единственность.** ▲ Вдумаемся в структуру доказанных нами теорем. Каждая из них содержит два разнородных утверждения. Рассмотрим, например, теорему 1: «Через каждые две точки проходит прямая, и притом только одна». В ней содержатся два утверждения: 1) через каждые две точки проходит прямая; 2) такая прямая только одна.

Эти утверждения можно выразить несколько иначе: 1) для любых двух точек существует проходящая через них прямая (хотя бы одна!); 2) для любых двух точек такая прямая единственная, или, другими словами, для любых двух точек существует не более одной проходящей через них прямой.

Первое — это утверждение о существовании прямой, второе — о её единственности. Соответственно такие утверждения называются **утверждения-**

ми (теоремами или аксиомами) **существования** и **единственности.** Разделите теоремы 2—5 на теоремы существования и теоремы единственности.

Хотя существование и единственность часто соединяются, как в теоремах 1—5, они независимы и встречаются по отдельности. Например, в аксиоме 1 о плоскости, проходящей через три точки, говорится лишь о существовании: когда точки лежат на одной прямой, через них проходит много плоскостей. Так и в жизни, если ваш друг говорит, что у него есть книга, то это ещё не значит, что она у него лишь одна.

Вот пример утверждения единственности без существования: в каждом треугольнике имеется не более одного тупого угла. Здесь существования может и не быть. Это можно выразить и так: если в треугольнике есть тупой угол, то он только один.

Вообще в теореме существования утверждается, что объект с нужными свойствами существует; в теореме единственности утверждается, что в случае, когда объект существует, он единственный.

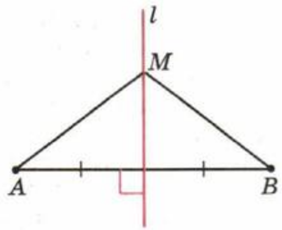
В заключение вернитесь ещё раз к аксиомам и теоремам из предыдущих параграфов и выделите в них утверждения существования и утверждения единственности. Дайте им другие формулировки. Формулировать одно и то же разными способами полезно, потому что это помогает лучше понять смысл сказанного. ▼

5.2 **Построения на плоскости. Метод геометрических мест.** Вспомним о построениях на плоскости (циркулем и линейкой). Указав, например, как построить окружность, описанную вокруг треугольника, мы тем самым доказываем её существование. Вообще, решая задачу на построение, мы доказываем теорему существования фигуры со свойствами, заданными в условии задачи. Это решение сводится к составлению некоторого алгоритма построения искомой фигуры, т. е. к указанию последовательности выполнения простейших операций, приводящих к необходимому результату. Простейшие операции — это проведение отрезков (прямых), окружностей и нахождение точек их пересечения. Затем (с помощью чертёжных инструментов) выполняется непосредственное построение фигуры на бумаге или на доске.

Важнейший метод построения — *метод геометрических мест.* Если фигура имеет **характер-**

ное свойство, определяющее, какие точки принадлежат фигуре, а какие ей не принадлежат, то о такой фигуре говорят, что она является **множеством** (или **геометрическим местом**) **точек, обладающих данным свойством.**

Например, окружность — это множество точек на плоскости, удалённых от данной точки плоскости (центра окружности) на данное расстояние — радиус окружности. А сфера — это множество точек в пространстве, удалённых от данной точки (центра сферы) на данное расстояние — радиус сферы.

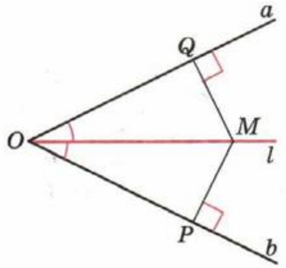


Если $M \in l$, то $MA = MB$.
Если $MA = MB$, то $M \in l$.

Рис. 58

Множество (геометрическое место) точек на плоскости, равноудалённых от двух точек A и B, — это серединный перпендикуляр отрезка AB (рис. 58).

А биссектриса выпуклого угла — это множество (геометрическое место) точек угла, равноудалённых от сторон угла (рис. 59).



Если $M \in l$, то $MP = MQ$.
Если $MP = MQ$, то $M \in l$.

Рис. 59

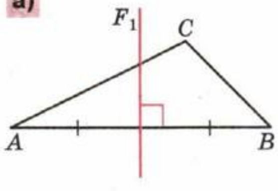
Когда мы устанавливаем, что некоторая фигура F является геометрическим местом точек, обладающих характерным свойством C, то мы всегда должны доказать два утверждения: 1) *если точка X принадлежит фигуре F, то она обладает свойством C*; 2) *если точка Y обладает свойством C, то она принадлежит фигуре F.*

Второе утверждение можно заменить равносильным ему: 2*) *если точка Y не принадлежит фигуре F, то она не обладает свойством C.*

Подчеркнём, что когда говорят о множестве точек, обладающих некоторым свойством, то всегда имеют в виду множество *всех* точек, обладающих этим свойством. Если точка X принадлежит фигуре F, то пишут $X \in F$.

Термин *множество* имеет общематематический характер, говорят о множестве чисел, о множестве функций, о множестве фигур и т. п. А понятие *геометрическое место точек* вы можете встретить лишь в пособиях по геометрии.

а)



б)

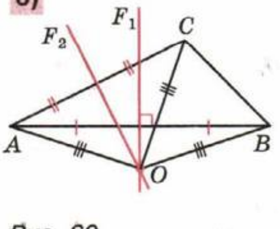


Рис. 60

□ Задача о построении центра O окружности, описанной вокруг треугольника ABC, решается методом геометрических мест. Точка O равноудалена от точек A и B. Поэтому она лежит на серединном перпендикуляре F_1 отрезка AB (рис. 60, *а*). Далее, точка O равноудалена от точек A и C. Поэтому она лежит на серединном перпендикуляре F_2 (рис. 60, *б*). Следовательно, искомая точка O является пересечением прямых F_1 и F_2. ■

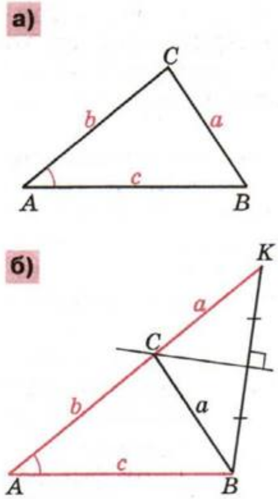


Рис. 61

Решение этой задачи хорошо иллюстрирует *сущность метода геометрических мест*. Анализируя условие задачи, мы приходим к выводу, что искомая точка O принадлежит двум геометрическим местам точек — фигурам F_1 и F_2, т. е. является одной из точек пересечения этих фигур. Если эти фигуры F_1 и F_2 можно построить циркулем и линейкой, то и точка O может быть построена циркулем и линейкой.

Вспомните, как, используя метод геометрических мест, вы строили центр окружности, вписанной в треугольник.

Проведём *анализ решения* ещё одной задачи: построить треугольник ABC, если заданы $a+b$, c и угол A.

Допустим, искомый треугольник построен (рис. 61, *а*). Продолжим его сторону AC на отрезок $CK=a$ и проведём отрезок BK (рис. 61, *б*). Треугольник ABK можно построить (по двум сторонам и углу между ними). А точка C равноудалена от точек B и K, т. е. лежит на серединном перпендикуляре отрезка BK.

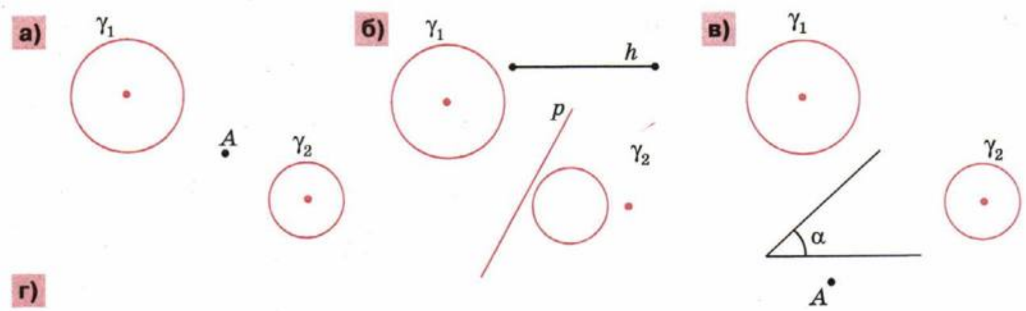
5.3 **Методы преобразований.** При решении планиметрических задач на построение часто используются геометрические преобразования — движения и подобия. Решим сначала четыре задачи, используя движения на плоскости.

Задача 1. *Даны точка A и две окружности γ_1 и γ_2. Построить отрезок BC, концы которого лежат соответственно на окружностях γ_1 и γ_2 и серединой которого является точка A* (рис. 62, *а*).

Задача 2. *Даны две окружности γ_1 и γ_2 и прямая p. Построить равнобедренный треугольник так, чтобы вершины его основания лежали соответственно на данных окружностях, а высота, проведённая к этому основанию, была равна данному отрезку h и лежала на данной прямой* (рис. 62, *б*).

Задача 3. *Даны две окружности γ_1 и γ_2 и точка A. Построить равнобедренный треугольник с вершинами B и C основания, лежащими на данных окружностях соответственно так, чтобы угол при вершине A был равен данному углу α* (рис. 62, *в*).

Задача 4. *Даны две окружности γ_1 и γ_2 и отрезок AD. Построить параллелограмм $ABCD$*



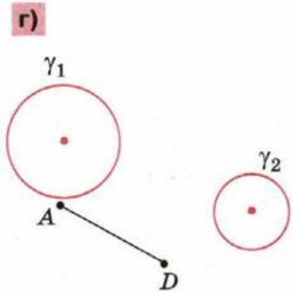
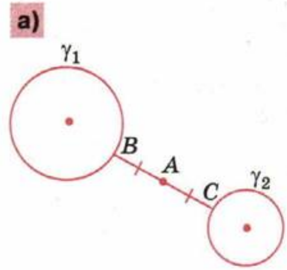


Рис. 62

так, чтобы точки B и C лежали соответственно на данных окружностях (рис. 62, *г*).

Проводя анализ условий этих задач, замечаем, что они похожи друг на друга: в каждом случае легко указать движение f, которое точку B переводит в точку C. В задаче 1 это симметрия относительно точки A, в задаче 2 это симметрия относительно прямой p, в задаче 3 это поворот вокруг точки A на угол α, а в задаче 4 это перенос на вектор $\overrightarrow{AD}$. Но так как положение точки B на окружности γ_1 нам неизвестно, то рассматриваем образ окружности γ_1 при этом преобразовании f (рис. 63, *а—г*). И теперь становится ясно, что во всех четырёх случаях точка C — это точка пересечения окружностей γ_2 и $f(\gamma_1)$. А затем уже строится точка B. Построение указано на рисунке 64, *а—г* на с. 48.



Итак, мы решили все четыре задачи: задачу 1 — *методом центральной симметрии*, задачу 2 — *методом осевой симметрии*, задачу 3 — *методом поворота*, задачу 4 — *методом параллельного переноса*.

Единообразные решения рассмотренных задач подсказывают нам основную идею методов дви-

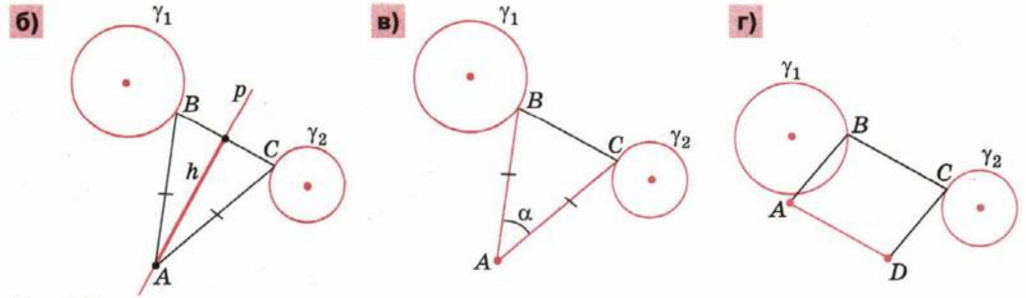


Рис. 63

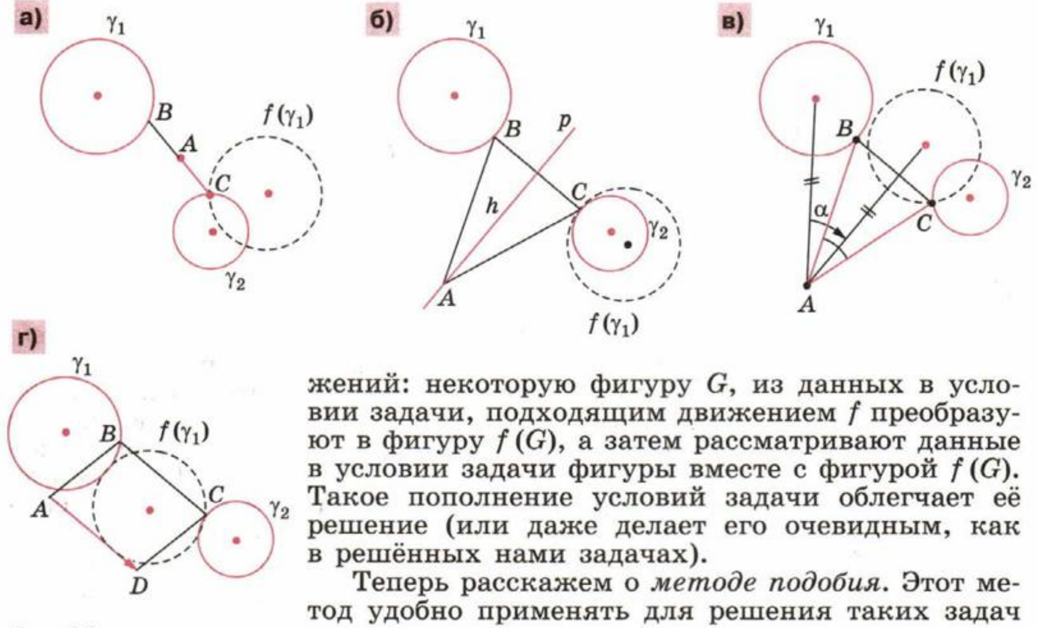


Рис. 64

жений: некоторую фигуру G, из данных в условии задачи, подходящим движением f преобразуют в фигуру $f(G)$, а затем рассматривают данные в условии задачи фигуры вместе с фигурой $f(G)$. Такое пополнение условий задачи облегчает её решение (или даже делает его очевидным, как в решённых нами задачах).

Теперь расскажем о *методе подобия*. Этот метод удобно применять для решения таких задач на построение, в которых условие распадается на две части. Первая из этих частей определяет искомую фигуру с точностью до подобия. Вторая же часть условия задачи позволяет выделить из множества подобных друг другу фигур ту, которая ему удовлетворяет и тем самым является решением задачи. Проиллюстрируем это общее положение.

Задача 5. *Построить треугольник по двум углам и периметру p* (рис. 65, *а*).

Решение. Первая часть условия определяет треугольник с точностью до подобия: все треугольники, два угла которых равны данным, подобны.

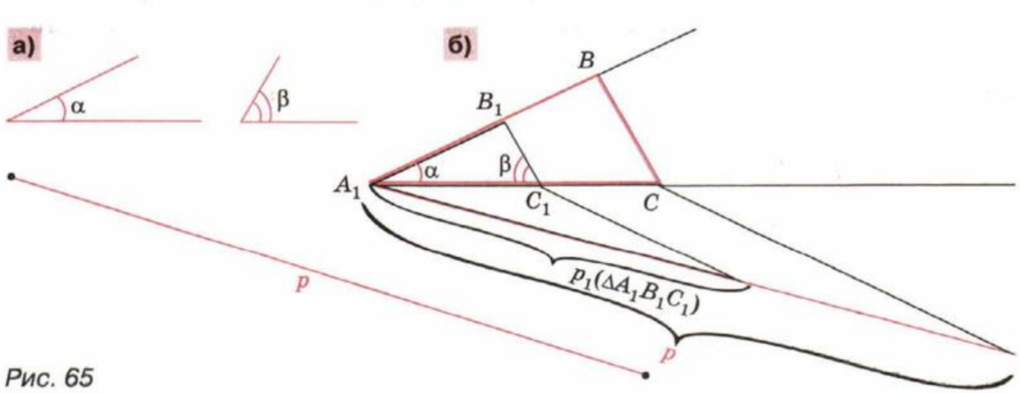


Рис. 65

Построим один из таких треугольников — треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 65, *б*), а затем построим треугольник ABC, подобный построенному, с коэффициентом, равным отношению данного отрезка p к периметру треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 65, *б*). ■

5.4 **Построения в пространстве.** ▲ Итак, в планиметрии решение задачи на построение имеет как бы две стороны: теоретическую — алгоритм построения — и практическую — реализация этого алгоритма, например циркулем и линейкой.

У стереометрической задачи на построение остаётся лишь одна сторона — теоретическая, так как нет инструментов для построения в пространстве, аналогичных циркулю и линейке.

За основные построения в пространстве принимаются те, которые обеспечиваются аксиомами и теоремами о существовании прямых и плоскостей. Это — проведение прямой через две точки, проведение плоскости (аксиома 1 и теоремы § 2), а также построение прямой пересечения любых двух построенных плоскостей (аксиома 2). Кроме того, мы, естественно, считаем, что можно выполнять планиметрические построения в уже построенных плоскостях. ▼

Решить задачу на построение в пространстве — это значит указать последовательность основных построений, в результате которых получается нужная фигура. Обычно явно указываются не все основные построения, а делаются ссылки на уже решённые задачи на построение. Рассмотрим, например, такую задачу.

Задача. *Через данную точку пространства провести (построить) прямую, пересекающую данную прямую и перпендикулярную этой прямой.*

Решение. Пусть в пространстве заданы точка A и прямая a.

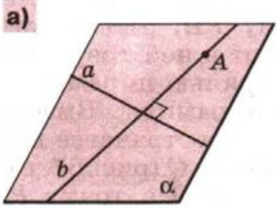
Возможны два случая.

1. Точка A не лежит на прямой a (рис. 66, *а*).

Проведём (по теореме 3) через точку A и прямую a плоскость α. По известной теореме планиметрии в плоскости α через точку A можно провести единственную прямую b, перпендикулярную прямой a. Итак, мы построили (провели) искомую прямую b: b проходит через A, пересекает a, и $b \perp a$.

В рассматриваемом случае решение единственно.

а)



б)

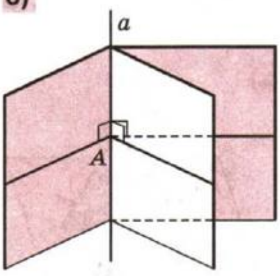


Рис. 66

Действительно, прямая, удовлетворяющая условию задачи, лежит в единственной плоскости α, проходящей через точку A и прямую a. А в плоскости через данную точку можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную данной прямой.

2. Точка A лежит на прямой a (рис. 66, *б*).

Через прямую a проходит бесконечно много плоскостей. В каждой из них через точку A можно провести прямую, перпендикулярную прямой a в точке A. Поэтому в данном случае задача имеет бесконечно много решений (в п. 7.2 будет доказано, что все эти прямые лежат в одной плоскости и заполняют её).

5.5 О построении пирамид и призм.

▲ Построить пирамиду (а значит, и решить вопрос о её существовании) можно так.

Строим в какой-нибудь плоскости α какой-либо многоугольник Q — основание пирамиды (рис. 67, *а*). Берём любую точку P, не лежащую в плоскости α, и соединяем её отрезками со всеми вершинами многоугольника Q. Эти отрезки будут боковыми рёбрами пирамиды. Вместе со сторонами многоугольника Q они образуют «каркас» из рёбер пирамиды. Построим её боковые грани.

Пусть AB — какая-либо сторона многоугольника Q (рис. 67, *б*). Через три точки P, A, B, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость β. Отрезки PA, PB, AB лежат в этой плоскости и ограничивают в ней треугольник PAB. Он и будет боковой гранью пирамиды. Так строим все боковые грани пирамиды. Вместе с основанием Q они ограничат в пространстве пирамиду T с вершиной P и основанием Q (рис. 67, *в*).

Итак, какой бы многоугольник Q и точку P, не лежащую в его плоскости, ни задать, существует пирамида с основанием Q и вершиной P. ■

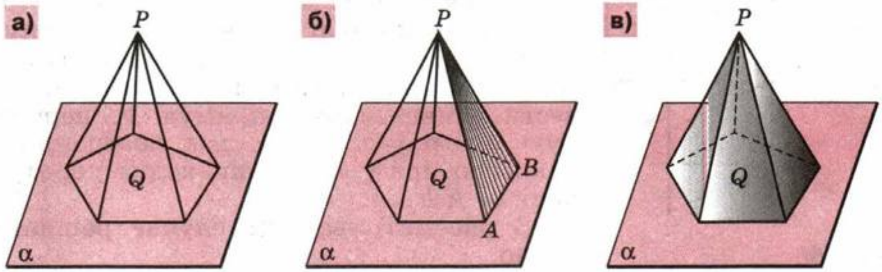


Рис. 67

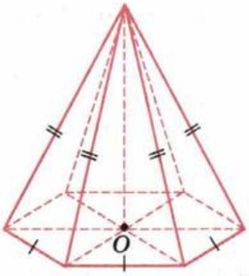


Рис. 68

Напомним, что **пирамида** называется **правильной**, если её основание — правильный многоугольник, а все её боковые рёбра равны. Поэтому у правильной пирамиды все боковые грани — равные равнобедренные треугольники (рис. 68). Спрашивается: а как построить правильную пирамиду? Где надо взять точку P в проведённом выше построении пирамиды, чтобы она получилась правильной? А может быть, правильную пирамиду построить нельзя и таких пирамид не существует?

В главе IV мы укажем, как строить правильные пирамиды.

Перейдём к призмам. ***n*-угольной призмой** называется многогранник, две грани которого — **основания призмы** — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы (рис. 69). Эти параллелограммы называются **боковыми гранями призмы.** Любая боковая грань имеет с каждым основанием по одной общей стороне.

Параллелепипед — это призма, в основании которой параллелограмм (см. рис. 1, *в*). Поэтому все грани параллелепипеда играют одинаковую роль и любые две его противоположные грани можно считать основаниями. **Прямоугольный параллелепипед** — это параллелепипед, все грани которого прямоугольники. Примерами прямоугольных параллелепипедов могут служить всевозможные коробки, а шестиугольных призм — неотточенные карандаши. Форму призм имеют многие столбы и колонны (рис. 70), как, например, на станции «Комсомольская» в Московском метрополитене.

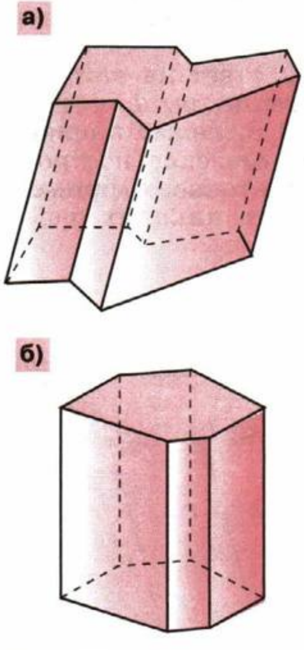


Рис. 69

Рис. 70

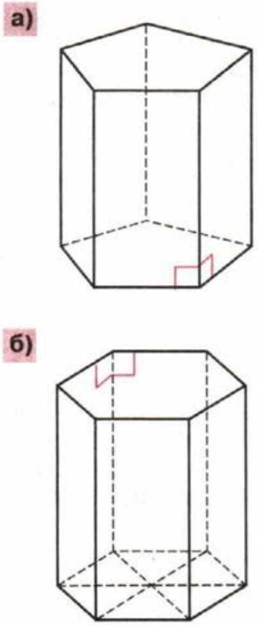


Рис. 71

Призма называется **прямой**, если все её боковые грани — прямоугольники (рис. 71, *а*). Прямая **призма** называется **правильной**, если её основания — правильные многоугольники (рис. 71, *б*).

Призму, например пятиугольную, можно построить так. Возьмём в некоторой плоскости α какой-либо пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Из вершины A_1 проведём какой-нибудь отрезок A_1B_1, не лежащий в плоскости α (рис. 72, *а*). Через точки A_1, A_2, B_1 проходит единственная плоскость. В ней построим параллелограмм с противоположными сторонами A_1B_1 и A_2B_2.

Далее, аналогично построим параллелограмм со сторонами A_2B_2 и A_3B_3 (рис. 72, *б*) и т. д. Продолжая, дойдём до параллелограмма со стороной A_5B_5. Отрезок A_1B_1 уже проведён. Вместе с отрезком A_5B_5 они составят стороны последней, пятой боковой грани (они параллельны согласно признаку параллельности прямых, доказанному в п. 3.3). Построенные боковые грани $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3, \ldots, A_5B_5B_1A_1$ вместе с основаниями — многоугольниками $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$ — ограничат в пространстве призму.

Однако почему все отрезки B_1B_2, B_2B_3, ..., B_5B_1 будут лежать обязательно в одной плоскости?

Дальше в § 21 мы получим ответ на этот вопрос и докажем, что построение выполняется всегда: все отрезки B_1B_2, ..., B_5B_1 лежат в одной плоскости. Поэтому если практическое построение призмы делается достаточно точно, например ставятся столбы или колонны, то никаких перекосов быть не должно.

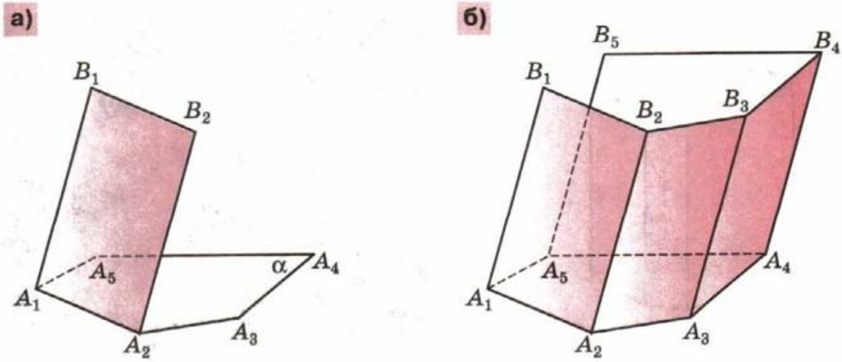


Рис. 72

5.6 **О значении геометрии.** Вопросы построения пирамид и призм подводят к общему вопросу о значении идеальных геометрических построений и выводов.

Геометрия имеет громадное практическое значение, появляясь всюду, где нужна хоть малейшая точность в определении формы, размеров и расстояний. Однако каждому человеку понятно, что в природе, в технике нет ни отрезков без всякой ширины, ни бесконечных прямых, ни точек без всяких размеров. Идеальные геометрические фигуры существуют лишь только в нашем мышлении. Так есть ли в них практическая надобность?

Для того чтобы делать точные выводы, точно решать практические задачи, нужны точные правила. А точные общие правила требуют точных общих понятий.

Например, если указано теоретическое построение призмы с данным основанием и боковыми рёбрами, то мы уверены, что практически такое построение всегда возможно (но в каждом случае с разной степенью точности, которая зависит от конкретных условий). Если построение «не совсем получилось», то причина в том, что либо построение не было выполнено достаточно точно, либо на каком-то этапе была допущена ошибка, но проверять теоретическое правило не нужно: оно установлено в общем виде.

В этом состоит значение математической точности вообще. В практике она недостижима, но она обеспечивает общие точные выводы, которые можно применять. Прочная логическая структура теоретических выводов нужна математике, как нужна прочная структура хорошей машине. Математика, можно сказать, и есть такая машина для решения разнообразных задач науки и практики. ▼

Вопросы для самоконтроля

1 Приведите собственный пример утверждения: а) существования; б) единственности; в) существования и единственности.

2 Чем отличаются построения на плоскости от построений в пространстве?

3 Приведите пример задачи на построение в пространстве.

4 Какие геометрические места точек вам известны?

5 Какая польза от геометрии, если её объекты реально не существуют?

Задачи

5.1. Дополняем теорию | Постройте на плоскости геометрическое место (множество) точек, из которых данный отрезок виден под заданным углом.

Задачи к п. 5.2

5.2. Постройте на плоскости следующие геометрические места (множества) точек: а) множество точек, равноудалённых от двух данных концентрических окружностей; б) множество точек, равноудалённых от трёх заданных прямых; в) множество центров окружностей, касающихся заданной прямой в данной её точке; г) множество середин хорд заданной окружности, имеющих данную длину.

5.3. Постройте треугольник: а) по стороне, противолежащему ей углу и радиусу описанной окружности; б) по стороне, противолежащему ей углу и высоте на другую сторону; в) по стороне, медиане и высоте к одной из других сторон; г) по стороне, медиане ко второй стороне и высоте к третьей стороне; д) по стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности.

5.4. Постройте окружность: а) касающуюся трёх заданных прямых; б) касающуюся заданной прямой в данной её точке и другой заданной прямой; в) касающуюся заданной прямой в данной её точке и проходящей через заданную точку; г) касающуюся заданной прямой в данной её точке и данной окружности; д) касающуюся заданной прямой и заданной окружности в данной на ней точке.

5.5. Постройте точку, из которой данный круг и данный отрезок видны под данными углами. (Говорят, что окружность видна из точки под данным углом α, если угол между касательными, проведёнными из данной точки, равен α.)

Задачи к п. 5.3

5.6. а) Заданы две прямые и точка A. Постройте отрезок с концами на данных прямых, серединой которого является точка A. б) Решите аналогичную задачу, задав вместо двух прямых прямую и окружность.

5.7. Постройте трапецию по четырём сторонам.

5.8. Даны острый угол и точка A внутри его. Постройте треугольник ABC наименьшего периметра так, чтобы точки B и C лежали соответственно на сторонах данного угла.

5.9. В данный квадрат впишите равносторонний треугольник, одна вершина которого находится в данной точке на стороне квадрата.

5.10. Постройте четырёхугольник по углам и диагоналям.

5.11. а) Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую так, чтобы на этой прямой окружности отсекали равные хорды. б) Даны два круга и точка. Постройте прямую, проходящую через данную точку так, чтобы на данных кругах образовались равные хорды.

5.12. Постройте правильный треугольник так, чтобы его вершины лежали на трёх заданных параллельных прямых.

5.13. В данную окружность впишите треугольник, подобный данному.

5.14. Постройте треугольник по двум углам и сумме медиан.

5.15. Постройте треугольник по двум углам и радиусу вписанной (описанной) окружности.

5.16. Постройте параллелограмм по стороне, отношению диагоналей и углу между ними.

5.17. Постройте ромб по стороне и отношению диагоналей.

5.18. Постройте ромб по углу и сумме диагоналей.

5.19. Постройте квадрат по сумме стороны и диагонали.

Задачи к п. 5.5

5.20. Дан *PABC* — правильный тетраэдр. Нарисуйте прямую: а) проходящую через точку *P* перпендикулярно прямой *AC*; б) проходящую через точку *C* перпендикулярно прямой *PB*; в) проходящую через точку *K* — середину ребра *BC* — перпендикулярно ребру *PA*; г) проходящую через точку *K* перпендикулярно ребру *BC*.

5.21. Дана *PABCD* — правильная пирамида. 1) Нарисуйте прямую, проходящую через точку *P* и перпендикулярную: а) (*AD*); б) (*CD*); в) (*AC*); г) (*BD*). Как вычислить (задачи а) — г)) длину отрезка прямой в этой пирамиде, если её рёбра известны? 2) Нарисуйте прямую, проходящую через точку *K* — середину ребра *AD* — перпендикулярно (*PQ*), где точка *Q* — центр основания пирамиды. Замените точку *K* любой точкой *X* ребра *AD* и сделайте то же самое.

Задачи к главе I

I.1. На плоскости α лежит равносторонний треугольник *ABC*, стороны которого равны 1. Точка *K* удалена от точек *A* и *B* на расстояние 2. Можете ли вы вычислить расстояние от *K* до вершины *C*? Можете ли узнать, в каких границах лежит это расстояние?

I.2. Пусть *PABC* — правильный тетраэдр с ребром 2. Точка *K* — середина ребра *PA*, точка *L* — середина *PB*, точка *M* — середина *BC*, а *N* — середина *AC*. а) Вычислите *KL*, *LM*, *MN*, *NK*. б) Вычислите *KM*, *LN*. в) Вычислите углы *NKL*, *LMN*, *KLM*, *MNK*. г) Докажите, что *KLMN* — прямоугольник. д) Докажите, что *KM* — общий перпендикуляр прямых *PA* и *BC*, а *LN* — общий перпендикуляр прямых *PB* и *AC*.

I.3. Два отрезка *AB* и *CD* лежат на скрещивающихся прямых. Известны их длины, а также расстояние между их концами: *AC*, *AD*, *BC*, *BD*. Как вычислить расстояния между серединами этих отрезков? Выведите формулу для искомого расстояния.

I.4. Пусть *PABC* — правильный тетраэдр с ребром 2, точка *Q* — центр грани *ABC*. Вычислите: а) *PQ*; б) расстояние от *Q* до середины бокового ребра; в) расстояние от *Q* до центра боковой грани; г) расстояние между центрами двух граней.

I.5. В правильном тетраэдре *PABC*, ребро которого равно 1, проведено сечение плоскостью *BNO*, где точка *N* — середина *PA* и точка *O* — середина *PC*. Вычислите длину общего отрезка этого сечения и сечения плоскостью: а) *PBK*, где *K* — середина *AC*; б) *ACM*, где *M* — середина *PB*; в) *PLS*, где *L* — середина *BC* и *S* — середина *AB*; г) *CMN*.

I.6. а) Докажите, что существует прямая, которая пересекает каждое из двух противоположных рёбер правильного тетраэдра под прямым углом.
б) Существует ли такая прямая для любой правильной треугольной пирамиды?

Применяем компьютер

I.7. Найдите кратчайшую замкнутую четырёхзвенную ломаную, вершины которой лежат на сторонах данного квадрата — по одной вершине внутри каждой его стороны.

I.8. Внутри квадрата требуется построить прямоугольник наименьшего периметра, причём вершины прямоугольника находятся на сторонах квадрата, а каждая его сторона параллельна хотя бы одной диагонали квадрата. С другой стороны, внутри того же квадрата требуется построить прямоугольник наибольшей площади, причём вершины прямоугольника находятся на сторонах данного квадрата, а каждая его сторона параллельна хотя бы одной диагонали квадрата. Ответьте на вопрос: это один прямоугольник или разные прямоугольники?

I.9. Прямая p проходит через вершину A квадрата $ABCD$, причём квадрат лежит с одной стороны от данной прямой. Известны длины перпендикуляров, проведённых из точек B и D на прямую p. Найдите длину перпендикуляра, проведённого на прямую p из вершины C квадрата.

I.10. Внутри угла дана точка. Можно ли через неё провести такой отрезок с концами на сторонах угла, чтобы он в этой точке делился пополам?

I.11. Через данную точку внутри угла провести прямую так, чтобы эта прямая от данного угла отсекала треугольник наименьшей площади.

I.12. Постройте квадрат, если известны его центр и две точки на противоположных сторонах.

I.13. Дан равносторонний треугольник ABC. Из вершины A по стороне AC двинулась точка M, из вершины C по лучу BC, удаляясь от точки B, двинулась точка N. Скорости этих точек одинаковы, движение начато одновременно. Найдите наименьшее значение MN.

I.14. ABD и BCD — равносторонние треугольники. По отрезку AB от B к A равномерно движется точка P, по отрезку BC от C к B с такой же скоростью движется точка Q. Они начали движение одновременно. Найдите наименьшее и наибольшее значения угла PDQ.

I.15. В неравнобедренном треугольнике ABC ($AB > AC$) из вершины A провели его медиану AM и биссектрису AL. Выясните, какой из этих отрезков длиннее.

I.16. Дан остроугольный треугольник ABC. Поведены три его высоты AA_1, BB_1, CC_1. Пусть O — точка их пересечения. Ответьте на вопросы:
1) Какой из отрезков OA, OB, OC наименьший?
2) Какой из отрезков OA_1, OB_1, OC_1 наименьший?

I.17. Дан равносторонний треугольник ABC. На его стороне AC с другой стороны от точки B построен ромб $ACLK$. Зависит ли угол KBL от положения стороны KL?

I.18. Нарисуйте пятиугольную звезду — замкнутую ломаную $ABCDEA$. Найдите сумму её углов в вершинах A, B, C, D, E. Сохранится ли сумма этих углов, если чуть «пошевелить» одну из вершин звезды?

Итоги главы I

Основными результатами § 1—3 можно считать следующие утверждения:

Прямую в пространстве можно задать:
1) **двумя её точками** (теорема 1 п. 2.1);
2) **как пересечение двух плоскостей** (аксиома 2 п. 1.2).

Плоскость в пространстве можно задать:
1) **тремя её точками, не лежащими на одной прямой** (теорема 2 п. 2.2);
2) **прямой и не лежащей на ней точкой** (теорема 3 п. 2.3);
3) **двумя пересекающимися прямыми** (теорема 4 п. 2.4);
4) **парой параллельных прямых** (последняя фраза в п. 3.1).

В главе I мы учились **рисовать пространственные фигуры в параллельной проекции**. Уметь наглядно и правильно рисовать пространственные фигуры очень важно для успешного овладения стереометрией.

Наконец, в § 5 мы проанализировали теоремы § 2 и 3, выяснили, что в них доказаны как утверждения о существовании некоторых объектов, так и утверждения об их единственности. А задачи на построение фигур в геометрии и являются предложениями (теоремами) о существовании этих фигур, доказываемыми конструктивно. Как это можно осуществить, проиллюстрировано для пирамид и призм.

Глава II

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Эта глава — центральная и наиболее трудная в курсе геометрии 10 класса: в ней 10 из 20 параграфов этого курса. Самым важным из отношений, изучающихся в этой главе, является отношение перпендикулярности прямой и плоскости. Оно изучается в § 6—9. Опуская перпендикуляры из точек на плоскость, мы проектируем пространственные фигуры в плоские и тем самым сводим стереометрические задачи к планиметрическим. Именно это простейшее, но и важнейшее из стереометрических построений лежит в основе ортогонального проектирования и начертательной геометрии, о которых рассказано в § 13.

Изучать параллельность и перпендикулярность плоскостей значительно проще после того, как изучена перпендикулярность прямой и плоскости (см. § 10 и 11). Например, легко строится плоскость, проходящая через заданную точку и параллельная заданной плоскости (п. 11.3). И при вычислении расстояний между фигурами (§ 14) и углов между прямыми и плоскостями (§ 15) мы тоже опираемся на перпендикулярность прямой и плоскости.

Понятие о расстоянии между фигурами, частным случаем которого является понятие расстояния между точками (§ 14), позволит по-новому взглянуть на параллельные прямые и плоскости — как на прямые и плоскости, идущие на постоянном расстоянии друг от друга.

Теоремы этой главы весьма наглядны: их можно себе представлять как предложения о вертикалях и горизонталях и иллюстрировать на окружающих нас предметах. Эти иллюстрации идут, как правило, от строительства, и потому на всю главу II можно смотреть как на основы «строительной геометрии».

§ 6 Перпендикулярность прямой и плоскости

6.1 Определение перпендикулярности прямой и плоскости. Представление о прямых или, вернее, об отрезках, перпендикулярных плоскости, дают вертикально стоящие столбы (они перпендикулярны поверхности земли), натянутый шнур, на котором висит лампа (он перпендикулярен потолку), ножки стола (они перпендикулярны полу). Вертикальный косяк двери перпендикулярен полу, и нижний край двери, прилегающий к полу, перпендикулярен косяку при всех положениях двери (рис. 73, *а*). Этим свойством и определяется перпендикулярность прямой и плоскости.

а)

б)

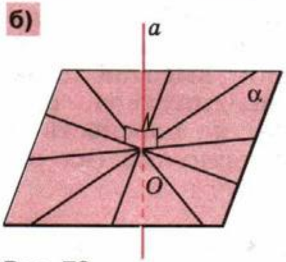


Рис. 73

Определение. **Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна ко всякой прямой в этой плоскости, проходящей через точку пересечения** (рис. 73, *б*).

Говорят также, что **плоскость перпендикулярна прямой** или что они **взаимно перпендикулярны.** Для взаимно перпендикулярных прямой a и плоскости α применяются обозначения $a \perp \alpha$ или $\alpha \perp a$.

Отрезок или луч перпендикулярен плоскости, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости. Если отрезок перпендикулярен плоскости и его конец лежит в этой плоскости, то он называется **перпендикуляром к данной плоскости.**

6.2 Перпендикуляр и наклонная. Отрезок, имеющий с плоскостью одну общую точку — конец отрезка, но не перпендикулярный данной плоскости, называется **наклонной к плоскости.**

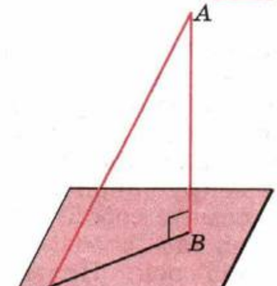


Рис. 74

Пусть из одной точки A, не лежащей в плоскости α, проведены перпендикуляр AB и наклонная AC (рис. 74). Отрезок BC называется **проекцией наклонной AC на плоскость α.**

Перпендикуляр AB короче наклонной AC, т. е. $AB < AC$. Действительно, в прямоугольном треугольнике ABC катет AB короче гипотенузы AC. Итак, *перпендикуляр короче наклонной, если они проведены из одной и той же точки к одной плоскости.*

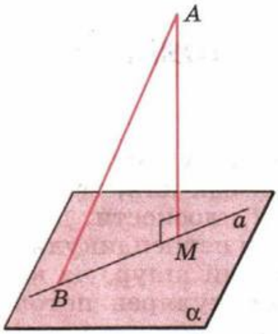


Рис. 75

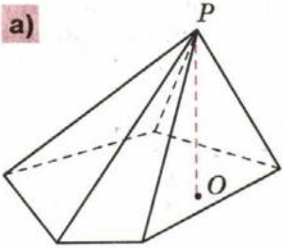
Это можно сказать и так: перпендикуляр AB из точки A на плоскость α — **кратчайший из отрезков**, соединяющих точку A с точками плоскости α.

Свойство перпендикуляра быть кратчайшим отрезком является **характерным свойством.** Это значит, что справедливо и обратное утверждение: *если AB — кратчайший отрезок от точки A до плоскости α, то AB — перпендикуляр к плоскости α.*

Доказательство. Докажем это методом от противного. Допустим, что AB не перпендикуляр к α. Тогда через точку B в плоскости α проходит прямая a, не перпендикулярная к AB (рис. 75). Опустим из A перпендикуляр AM на прямую a. В прямоугольном треугольнике ABM катет AM меньше гипотенузы AB: $AM < AB$. Но тогда отрезок AB не будет кратчайшим из всех отрезков, идущих из точки A до плоскости α. Получили противоречие. Следовательно, $AB \perp \alpha$. ■

Длиной перпендикуляра, опущенного из самой высокой точки предмета на его основание, измеряют высоту предмета. Так, **высотой пирамиды** называется длина перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость её основания, а также сам перпендикуляр (на рисунке 76, *а*, *б* — это отрезок PO).

а)



6.3 О значении перпендикуляра.

▲ Перпендикуляр к плоскости играет очень важную роль и помимо того, что он является кратчайшим среди всех отрезков от данной точки до точек плоскости. Поясним ещё его значение. Положение плоскости в пространстве можно задавать, указывая перпендикулярную ей прямую и ту точку, в которой она эту прямую пересекает.

б)

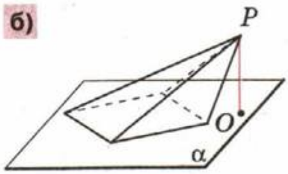


Рис. 76

Важнейшее свойство перпендикуляра состоит в том, что плоскость расположена симметрично относительно него. Что это значит? Все лучи, лежащие в данной плоскости, образуют с ним равные углы — прямые углы, а для наклонной это не так (рис. 77, *а*). При вращении вокруг перпендикуляра плоскость совмещается сама с собой: колесо должно быть насажено на ось так, чтобы его плоскость была перпендикулярна оси. Прямоугольник со стороной, перпендикулярной плоскости, можно вращать вокруг этой стороны, а другая сторона будет скользить по плоскости. Это хорошо

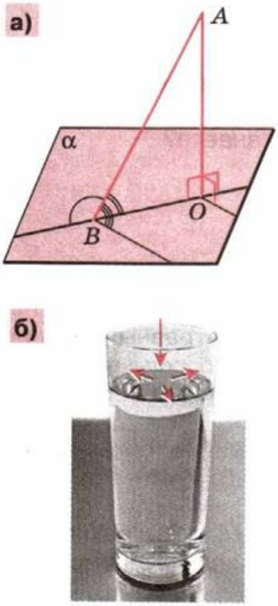


Рис. 77

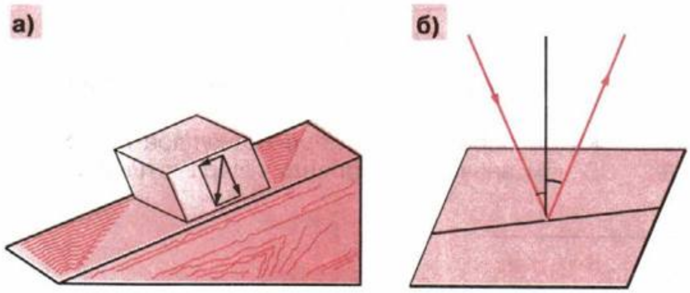


Рис. 78

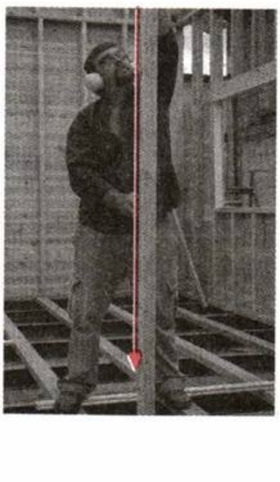
видно на правильно навешенной двери. Если её край не вертикален, дверь не открывается свободно и задевает пол.

Беря примеры из физики, можно отметить, что давление жидкости или газа на стенку сосуда направлено по перпендикуляру к стенке, так же как давление груза на опору направлено по перпендикуляру к ней (рис. 77, *б* и 78, *а*).

Перпендикуляр к поверхности фигурирует в законах отражения и преломления света. Так, закон отражения гласит: «Луч падающий и луч отражённый расположены в одной плоскости с перпендикуляром к поверхности зеркала в точке падения и образуют с ним равные углы». «Угол падения» и «угол отражения» — это углы между указанным перпендикуляром и лучом падающим и лучом отражённым (рис. 78, *б*).

Но главное значение перпендикуляра — это его роль в технике и во всей нашей жизни.

Мы, можно сказать, окружены перпендикулярами: ножки стола перпендикулярны полу, край шкафа перпендикулярен стене и т. д.



Вертикаль перпендикулярна горизонтальной плоскости. Вертикальность проверяют отвесом (см. фото). Перпендикулярность играет главную роль в строительстве: междуэтажные перекрытия укладывают перпендикулярно столбам каркаса здания.

Как мы дальше увидим, параллельность плоскостей связана с наличием у них общих перпендикуляров. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей — существенный элемент в строительстве, так что учение о перпендикулярах и параллелях можно назвать основами «строительной геометрии». ▼

Вопросы для самоконтроля

1. В чём различие между перпендикуляром к плоскости и наклонной к плоскости?
2. Какое определение перпендикуляра к плоскости вы знаете?
3. В чём значение перпендикуляра к плоскости?

Задачи

6.1. Дополняем теорию | Пусть из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр и две равные наклонные. Докажите, что равны: а) проекции этих наклонных; б) углы, которые они образуют с перпендикуляром; в) углы, которые они образуют со своими проекциями. Составьте и проверьте обратные утверждения.

6.2. Пусть в тетраэдре $PABC$ ребро $PB \perp (ABC)$, $PA = PC$ и K — точка на ребре AC. а) Пусть $PK \perp AC$. Докажите, что $BK \perp AC$. б) Пусть $BK \perp AC$. Докажите, что $PK \perp AC$.

6.3. Пусть AB — перпендикуляр из точки A на плоскость α, AC — наклонная к плоскости α. а) Пусть известны их длины. Как вычислить длину проекции BC? Как вычислить угол между наклонной и проекцией? б) Пусть известны длина наклонной и её угол со своей проекцией. Как вычислить длину перпендикуляра и длину проекции? в) Пусть известна длина перпендикуляра и угол между ним и наклонной. Как вычислить длины наклонной и проекции?

6.4. Пусть AB — перпендикуляр из точки A на плоскость α, AC и AD — две неравные наклонные к этой же плоскости. Докажите, что бóльшая из них: а) имеет бóльшую проекцию; б) образует с перпендикуляром больший угол; в) образует со своей проекцией меньший угол. Проверьте обратные утверждения.

N	PB	AB	PA	AC	$\angle ABC$	$\angle APC$
1	1	1			90°	
2	1	1		1		
3	1	1			120°	
4	1		2	2		
5	1		2			90°
6	1			2		90°

6.5. В тетраэдре $PABC$ ребро PB — его высота и $AB = BC$.

а) Заполните таблицу.

б)* Выберите сами три из указанных величин, дайте им численное значение и попытайтесь вычислить остальные.

в)* Установите связь между PA, AB, $\angle ABC$, $\angle APC$.

г)* Установите связь между AC, PB, $\angle ABC$, $\angle APC$.

6.6. Прикладная геометрия | а) В землю вертикально врыт столб. Из некоторой точки на земле он виден под углом φ. Из какой ещё точки на земле он виден под тем же углом? Какую фигуру образуют все такие точки? Из каких точек на земле он виден под бóльшим углом? под меньшим углом? б) Придумайте разные способы вычисления высоты столба, если: 1) можно подойти к нему вплотную; 2) можно подойти к нему по прямой на некоторое расстояние; 3)* можно идти мимо него по прямой.

§ 7 Признак перпендикулярности прямой и плоскости

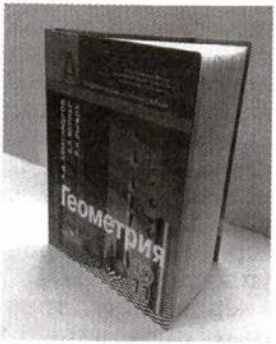
7.1 Основной признак перпендикулярности прямой и плоскости

Теорема 6. Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, перпендикулярна этой плоскости.

Пояснение. Понятно значение этой теоремы: достаточно установить (или обеспечить) перпендикулярность прямой только двум пересекающимся прямым в данной плоскости, как она будет перпендикулярна ко всем пересекающим её прямым, лежащим в этой плоскости.

Вот пример: раскройте книгу и поставьте её на стол (рис. 79, *а*). Корешок книги перпендикулярен краям обложки, лежащим на столе, и тем самым самому столу. Ещё пример. Устанавливая вертикально мачту, достаточно сделать так, чтобы она была перпендикулярна двум прямым, проведённым через её основание на палубе или на земле. А это можно сделать, натянув из одной точки мачты две пары растяжек равной длины и закрепив их на одинаковых расстояниях от основания мачты на каждой из двух прямых (рис. 79, *б*). Так же туристы устанавливают шатровую палатку. Доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости имеет в своей основе это реальное построение.

а)



б)

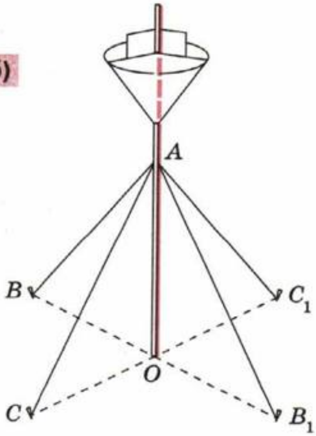


Рис. 79

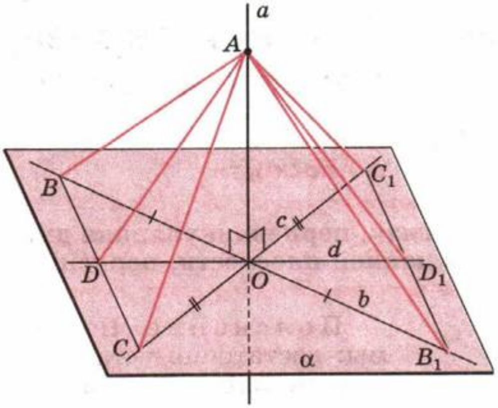


Рис. 80

Доказательство. Пусть прямая a пересекает плоскость α в точке O и перпендикулярна двум прямым b и c, проходящим в плоскости α через точку O. Нужно доказать, что прямая a перпендикулярна ко всякой прямой, проходящей через точку O в плоскости α. Возьмём любую такую прямую d, отличную от b и c (рис. 80).

Выберем на прямых b и c по точке B и C так, чтобы отрезок BC пересекал прямую d в какой-то точке D. Возьмём точки $B_1 \in b$ и $C_1 \in c$ так, чтобы точка O была серединой отрезков BB_1 и CC_1. Тогда $\triangle OB_1C_1 = \triangle OBC$. Поэтому $B_1C_1 = BC$ и $\angle B_1 = \angle B$. Отрезок B_1C_1 пересечёт прямую d в точке D_1. Поскольку $OB_1 = OB$, $\angle B_1 = \angle B$ и $\angle B_1OD_1 = \angle BOD$, то $\triangle OB_1D_1 = \triangle OBD$. Следовательно, $OD_1 = OD$ и $B_1D_1 = BD$.

Возьмём теперь на прямой a любую точку $A \neq O$ и проведём отрезки AB, AC, AD, AB_1, AC_1 и AD_1. Так как $a \perp b$ и $OB_1 = OB$, то a является серединным перпендикуляром к отрезку BB_1. Поэтому $AB_1 = AB$. Аналогично $AC_1 = AC$. Так как, кроме того, $B_1C_1 = BC$, то $\triangle AB_1C_1 = \triangle ABC$. Тем самым $\angle AB_1D_1 = \angle ABD$. Кроме этих равных углов в треугольниках ABD и AB_1D_1, имеем $AB_1 = AB$ и $B_1D_1 = BD$. Следовательно, $\triangle AB_1D_1 = \triangle ABD$. Но тогда и $AD_1 = AD$.

Итак, точка A равноудалена от концов отрезка DD_1. Так как точка O — середина отрезка DD_1, то прямая a, проходящая через точки A и O, является серединным перпендикуляром к отрезку DD_1 в плоскости ADD_1, т. е. $a \perp d$. Поэтому прямая a перпендикулярна к любой прямой d в плоскости α, проходящей через O, т. е. $a \perp \alpha$. ■

7.2 Плоскость перпендикуляров.

Как доказано в п. 5.4, в пространстве через данную точку A, лежащую на прямой a, проходит бесконечно много прямых, перпендикулярных прямой a (см. рис. 66, *б*). Все эти прямые лежат в одной плоскости. Теперь мы можем доказать это утверждение, опираясь на признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 7 *(о плоскости перпендикуляров).* **Прямые, перпендикулярные данной прямой в данной её точке, лежат в одной плоскости и заполняют её.**

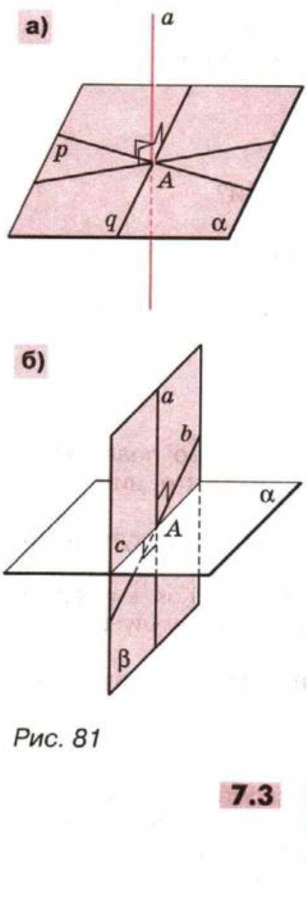


Рис. 81

Доказательство. Пусть a — данная прямая и A — какая-либо её точка. Возьмём любые две прямые p и q, проходящие через точку A и перпендикулярные прямой a (рис. 81, *а*). Плоскость α, проходящая через прямые p и q, содержит точку A и перпендикулярна прямой a (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Поэтому через каждую точку в плоскости α в ней проходит прямая, перпендикулярная прямой a. Иначе говоря, плоскость α заполняют прямые, перпендикулярные прямой a в точке A. Мы доказали второе утверждение теоремы. Докажем теперь первое.

Допустим, что через точку A проходит прямая b, перпендикулярная прямой a, но не лежащая в плоскости α. Проведём через неё и прямую a плоскость β. Плоскость β пересечёт α по некоторой прямой c (рис. 81, *б*). И так как $\alpha \perp a$, то $c \perp a$. Получается, что через точку A в плоскости β проходят две прямые b и c, перпендикулярные прямой a. Это невозможно. Значит, прямых, перпендикулярных прямой a в точке A и не лежащих в плоскости α, нет. ■

Пример к теореме о плоскости перпендикуляров дают спицы в колесе, перпендикулярные его оси: при вращении они зачерчивают плоскость (точнее, круг), принимая все положения, перпендикулярные оси вращения.

7.3 Построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей.

Доказывая теорему о плоскости перпендикуляров, мы решили такую задачу на построение: *через данную точку на данной прямой провести плоскость, перпендикулярную этой прямой.*

Такая плоскость *единственная*. Докажите это.

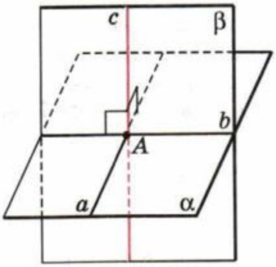


Рис. 82

Теперь решим другую задачу на построение.

Задача. **Через данную точку на данной плоскости провести прямую, перпендикулярную этой плоскости.**

Решение. Пусть даны плоскость α и точка A в плоскости α. Проведём в плоскости α через A какую-либо прямую a. Через точку A проведём плоскость β, перпендикулярную прямой a, — плоскость перпендикуляров (рис. 82). Плоскость β пересечёт плоскость α по некоторой прямой b. Проведём в плоскости β через A прямую c, перпендикулярную прямой b. Так как $c \perp b$ и $c \perp a$ (докажите!), то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $c \perp \alpha$. Задача решена. Единственность такой прямой докажите самостоятельно, применяя метод от противного. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Как проверить перпендикулярность прямой и плоскости?
2. Как образуется плоскость перпендикуляров?
3. Как построить плоскость, перпендикулярную прямой?
4. Как построить перпендикуляр к плоскости?
5. Какая задача на построение перпендикуляра к плоскости ещё не решена?

Задачи

7.1. Дополняем теорию | а) Докажите, что боковое ребро правильной призмы перпендикулярно её основаниям. б) Докажите, что диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

7.2. Дополняем теорию | В правильной пирамиде: а) четырёхугольной; б)* треугольной — соедините отрезком вершину с центром основания. Докажите, что этот отрезок является высотой пирамиды. Как вычислить его длину, если известны рёбра пирамиды? Запишите формулу для вычисления этой высоты через длины рёбер.

7.3. Дополняем теорию | Какую фигуру в пространстве образуют все точки, равноудалённые от двух данных точек?

Задачи к п. 7.1

7.4. Укажите взаимно перпендикулярные прямую и плоскость на рисунке 83.

7.5. а) Два равнобедренных треугольника имеют общее основание и не лежат в одной плоскости. Докажите, что их общее основание перпендикулярно плоскости, проходящей через оси симметрии треугольников. б) Пусть $PABC$ — правильная треугольная пирамида, точка D — середина ребра AC, точка Q — центр основания ABC. Докажите, что $AC \perp (PDQ)$. Обобщите это утверждение.

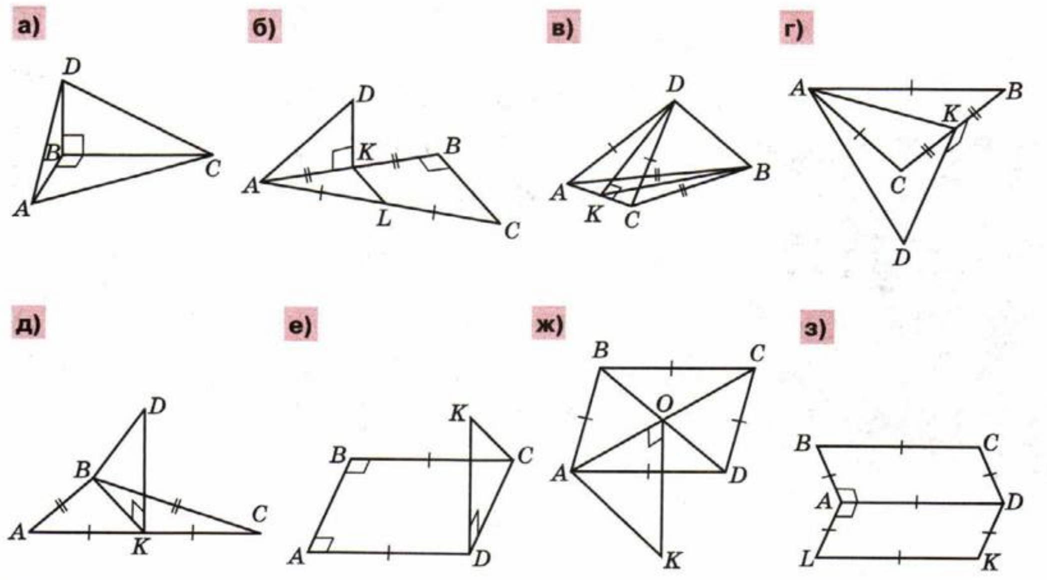


Рис. 83

Задачи к пп. 7.2, 7.3

7.6. Нарисуйте правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$. а) Нарисуйте её сечение плоскостью, проходящей через точку на ребре AA_1 и перпендикулярной этому ребру. б) Докажите, что это сечение равно основанию призмы. в)* Нарисуйте её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра AC и перпендикулярной ребру AC.

7.7. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Нарисуйте его сечение плоскостью: а) проходящей через середину ребра AC и перпендикулярной ребру AC; б) проходящей через другую точку ребра AC и перпендикулярной ребру AC.

7.8. Нарисуйте на поверхности правильного тетраэдра $PABC$ фигуру, каждая точка которой равноудалена от A и B.

7.9. В тетраэдре $PABC$ ребро $PB \perp (ABC)$ и $PB = AB = BC = CA$. Нарисуйте на его поверхности фигуру, каждая точка которой равноудалена от: а) A и C; б) B и C; в) P и B.

7.10. Через точку $O \in \alpha$ проведена прямая $a \perp \alpha$. Точки A и B лежат на a, а точка $X \in \alpha$. Докажите, что: а) $XA = XB$, если $OA = OB$; б) $XA > XB$, если $OA > OB$.

7.11. а) Точка O — центр окружности на плоскости α. Из O провели перпендикуляр OA к α. Докажите, что все точки окружности удалены от A на одно и то же расстояние. б) Пусть OA — перпендикуляр, выходящий из точки $O \in \alpha$. На какой линии лежат все точки α, одинаково удалённые от A?

7.12. Исследуем | Можно ли через данную точку провести четыре попарно перпендикулярные прямые?

§ 8 Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости

Рис. 84

Мы постоянно видим, что перпендикуляры к одной и той же плоскости параллельны. Например, вертикальные отрезки параллельны между собой. Эти отрезки могут представляться параллельно стоящими столбами или мачтами, стволами стройных сосен в корабельном лесу, колоннами зданий музея (рис. 84) или вертикальными опорами моста и т. д.

Эта изящная геометрия выражается в теореме, которую мы сейчас докажем.

8.1 Параллельность прямых, перпендикулярных одной плоскости

Теорема 8 *(о параллельности перпендикуляров).* **Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.**

Доказательство. Пусть две прямые a и b перпендикулярны плоскости α и пересекают её соответственно в точках A и B (рис. 85). Проведём через прямую a и точку B плоскость β и покажем, что прямая b также лежит в плоскости β.

В плоскости α возьмём отрезок MN, перпендикулярный отрезку AB и имеющий точку A своей серединой. Так как $AM = AN$ и $AB \perp MN$, то $BM = BN$.

Возьмём на прямой b любую точку $C \neq B$ и проведём отрезки CA, CM, CN. Поскольку $b \perp \alpha$, то треугольники CBM и CBN прямоугольные. Они равны, так как имеют общий катет CB и равные катеты BM и BN. Поэтому $CM = CN$, т. е. треугольник CMN равнобедренный. Его медиана CA является также его высотой, т. е. $CA \perp MN$.

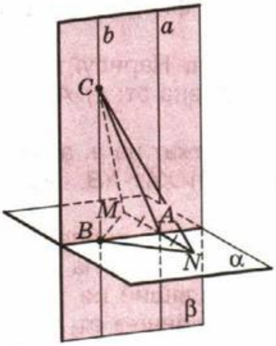


Рис. 85

Итак, три прямые, проходящие через точку A, — AC, AB и a — перпендикулярны прямой MN. По теореме о плоскости перпендикуляров (п. 7.2) они лежат в одной плоскости — плоскости β, которая проходит через прямые AB и a.

Поскольку прямая AC лежит в плоскости β, то точка $C \in \beta$. Значит, прямая b лежит в плоскости β (как и прямая a). Но в плоскости β прямые a и b перпендикулярны одной и той же прямой AB (так как $a \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$ и прямая AB лежит в α). Поэтому $b \parallel a$. ■

Доказанная теорема является признаком параллельности прямых в пространстве.

8.2 **Параллель к перпендикуляру.** В этом пункте мы докажем теорему, обратную теореме о параллельности перпендикуляров.

Теорема 9 *(о параллели к перпендикуляру).* **Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.**

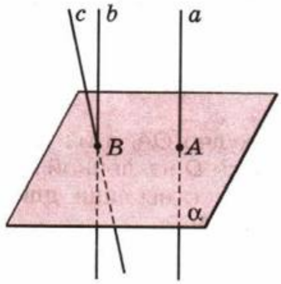


Рис. 86

Доказательство. Пусть две прямые a и b параллельны и a перпендикулярна плоскости α (рис. 86). Прямая b пересекает плоскость α в некоторой точке B (по лемме пункта 3.3). Имеются две возможности:

1) $b \perp \alpha$;

2) b не перпендикулярна α.

Предположим, что выполняется вторая. Тогда проведём через точку B прямую $c \perp \alpha$ (задача п. 7.3). По теореме о параллельности перпендикуляров $c \parallel a$. Получилось, что через точку B проходят две прямые, параллельные прямой a, что невозможно.

Итак, $b \perp \alpha$. ■

Теорема о параллели к перпендикуляру является ещё одним признаком перпендикулярности прямой и плоскости.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие признаки параллельности прямых вы узнали?
2. Какие признаки перпендикулярности прямой и плоскости вам известны теперь?

Задачи

8.1. Дополняем теорию | Через каждую точку некоторой прямой проводятся прямые, перпендикулярные данной плоскости. Докажите, что все они лежат в одной плоскости.

Задачи к п. 8.1

8.2. Пусть через точки A и B плоскости α проходят две прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные α. а) Докажите, что длины перпендикуляров, проведённых из точек одной из этих прямых на другую прямую, равны $|AB|$. б) Пусть $AA_1 = BB_1$ и точки A_1 и B_1 лежат с одной стороны от плоскости α. Докажите, что $A_1B_1 = AB$. в) Пусть $AA_1 = BB_1$, но точки A_1 и B_1 лежат с разных сторон от α. В какой точке отрезка AB прямая A_1B_1 пересекает α? г) Пусть известны $|AB|$, $|AA_1|$ и $|BB_1|$. Как вычислить $|A_1B_1|$? Как вычислить угол, который прямая A_1B_1 составляет с (AB)?

8.3. Прикладная геометрия | В землю врыты вертикально два столба. Известны их длины (над землёй) и расстояние между основаниями. Как вычислить длину провода, натянутого между ними (без учёта провисания)?

8.4. Прикладная геометрия | Вам нужно узнать высоту некоторого объекта, стоящего на земле. Как для этого можно применить теорему о параллельности перпендикуляров?

Задачи к п. 8.2

8.5. а) Сторона треугольника перпендикулярна плоскости α. Докажите, что средняя линия, соединяющая середины двух других его сторон, перпендикулярна плоскости α.
б) Докажите, что плоскость, перпендикулярная одной стороне параллелограмма, перпендикулярна ещё одной его стороне.

8.6. Пусть через точку O плоскости α проведён перпендикуляр OA, а из точки A — наклонная AC. Нарисуйте перпендикуляр из точки D наклонной AC на плоскость α. Как вычислить его длину, если будут известны лишь длины OA, OC, CD? А если будут известны длины OA, OC, AD?

§ 9 Основные теоремы о взаимно перпендикулярных прямой и плоскости

9.1 Теорема о прямой, перпендикулярной плоскости.

Теорема о параллели к перпендикуляру позволяет доказать основную теорему о прямой, перпендикулярной плоскости.

Теорема 10. Через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и притом только одна.

Доказательство. Пусть даны точка A и плоскость α (рис. 87, *а*). Можно считать, что A не лежит в плоскости α, так как случай, когда $A \in \alpha$, рассмотрен в задаче п. 7.3. Проведём через ка-

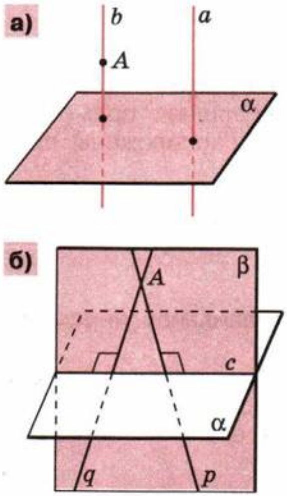


Рис. 87

кую-либо точку плоскости α прямую $a \perp \alpha$ (задача п. 7.3). Если a проходит через A, то она искомая прямая. Если это не так, то проведём через A прямую $b \parallel a$. По теореме о параллели к перпендикуляру $b \perp \alpha$. Итак, мы построили прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную α.

Докажем, что такая прямая единственная. Допустим, что через точку A проходят две прямые p и q, перпендикулярные α. Проведём через них плоскость β (рис. 87, *б*). Эта плоскость пересекает плоскость α по некоторой прямой c. Так как $p \perp \alpha$ и $q \perp \alpha$, то прямые p и q перпендикулярны прямой c. Получилось, что через точку A в плоскости β проходят две прямые p и q, перпендикулярные c. Из планиметрии известно, что это невозможно. Значит, через точку A проходит лишь одна прямая, перпендикулярная плоскости α. ■

9.2 Теорема о плоскости, перпендикулярной прямой. Изучение перпендикулярности прямой и плоскости мы завершим следующей теоремой:

Теорема 11. Через каждую точку проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна.

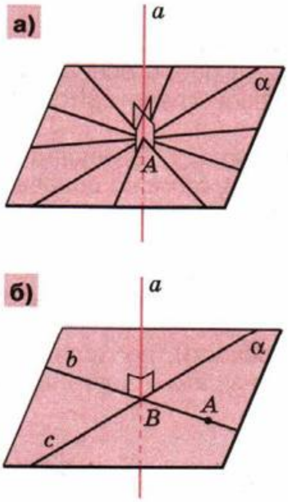


Рис. 88

Доказательство. Пусть заданы прямая a и точка A. Возможны два случая:

1) Точка A лежит на прямой a (рис. 88, *а*). Этот случай уже рассматривали в п. 6.2. Напомним, что плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a, является плоскость перпендикуляров к прямой a в точке A. Такая плоскость единственна.

2) Точка A не лежит на прямой a (рис. 88, *б*). В этом случае проведём через точку A прямую b, которая пересекает прямую a в некоторой точке B и перпендикулярна прямой a. Через точку B проведём плоскость α, перпендикулярную прямой a. Она является плоскостью перпендикуляров к a в точке B, а потому содержит прямую b. Но тогда α проходит через точку A. Итак, мы построили плоскость α, проходящую через точку A и перпендикулярную прямой a. Такая плоскость единственна (докажите это сами). ■

Вопросы для самоконтроля

1. Существование каких объектов доказано в этом параграфе?
2. Через точку A проведены плоскость α, перпендикулярная прямой a, и прямая b, перпендикулярная той же прямой. Как расположены прямая b и плоскость α?

Задачи

9.1. Дополняем теорию | Докажите, что высота правильной пирамиды проходит через центр её основания.

9.2. Дополняем теорию | Докажите, что точка, равноудалённая от всех вершин многоугольника, лежит на прямой, проведённой через центр описанной около него окружности и перпендикулярной его плоскости. Докажите обратное утверждение.

Задачи к п. 9.1

9.3. Вычислите высоту правильной треугольной пирамиды, у которой: а) каждое ребро равно 1; б) боковое ребро равно 3, а ребро основания равно 2; в) боковое ребро равно 1, а угол при вершине в боковой грани равен 90°; г) боковое ребро равно 1, а угол при вершине в боковой грани равен φ; д) ребро основания равно 2, а угол в боковой грани при этом ребре равен φ.

9.4. Пусть высота правильной треугольной пирамиды равна 1. Вычислите: а) боковое ребро, если сторона основания равна 2; б) сторону основания, если боковое ребро равно 2; в) её рёбра, если высота составляет с боковым ребром угол 30°; г)* рёбра, если угол в боковой грани при вершине пирамиды равен φ.

9.5. Вычислите высоту правильной четырёхугольной пирамиды, у которой: а) каждое ребро равно 1; б) боковое ребро равно 2, а ребро основания равно 1; в) ребро основания равно d, а угол в боковой грани при вершине равен φ.

9.6. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 1. Вычислите: а) боковое ребро, если сторона основания равна 1; б) сторону основания, если боковое ребро равно 2; в) рёбра, если боковое ребро составляет со своей проекцией на основание угол 45°; г) рёбра, если угол в боковой грани при вершине равен φ.

9.7. Точки P и Q равноудалены от вершин треугольника ABC. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна плоскости ABC.

9.8. Докажите, что диагональ куба перпендикулярна плоскости, проходящей через концы рёбер куба, выходящих из той же вершины, что и диагональ.

Задачи к п. 9.2

9.9. Нарисуйте сечение правильного тетраэдра $PABC$ плоскостью, проходящей через: а) точку P и перпендикулярной BC; б) точку C и перпендикулярной PA.

9.10. Все рёбра четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равны. Нарисуйте её сечение плоскостью, проходящей через: а) точку P и перпендикулярной AB; б) точку C и перпендикулярной PD; в) точку Q — центр основания — и перпендикулярной PC; г) точку A и перпендикулярной PC.

9.11. Через ребро AC правильной треугольной пирамиды $PABC$ проводится плоскость, перпендикулярная PB. Каким может быть сечение пирамиды такой плоскостью? Докажите, что площадь такого сечения — наименьшая среди площадей всех сечений AXC, где точка X — точка ребра PB.

§ 10 Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей

10.1 Двугранный угол. Угол между плоскостями. Две пересекающиеся прямые образуют *две пары вертикальных углов*. Подобно тому как две пересекающиеся прямые на плоскости образуют пару вертикальных углов (рис. 89, *а*), так две пересекающиеся плоскости в пространстве образуют две пары вертикальных двугранных углов (рис. 89, *б*). **Двугранным углом** называют фигуру, которая состоит из двух полуплоскостей, имеющих общую граничную прямую и не лежащих в одной плоскости (рис. 90). Сами полуплоскости называют **гранями двугранного угла**, а их общую граничную прямую — **его ребром.**

Измеряют двугранные углы следующим образом.

Возьмём на ребре p двугранного угла с гранями α и β точку O. Проведём из точки O в его гранях лучи a и b, перпендикулярные ребру p: a — в грани α и b — в грани β (рис. 91, *а* на с. 74).

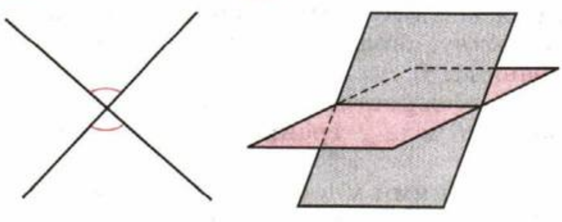


Рис. 89

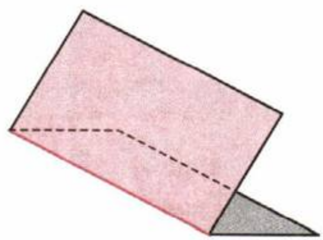
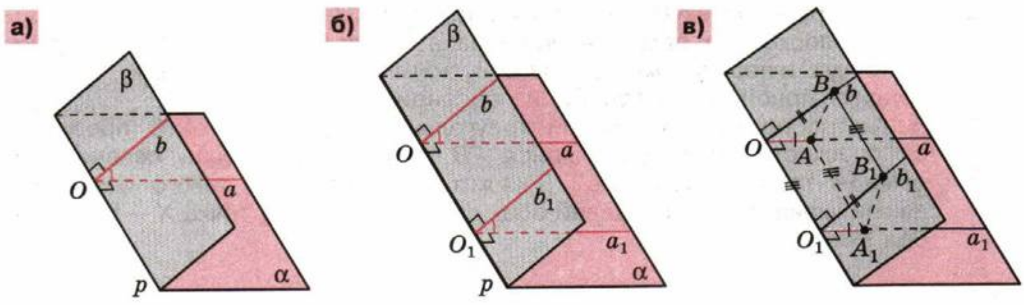


Рис. 90



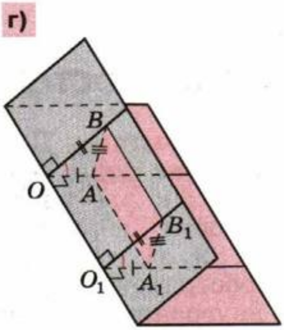


Рис. 91

Угол со сторонами a, b называется **линейным углом двугранного угла.**

Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.

□ Действительно, возьмём другую точку O_1 ребра p и проведём в гранях α и β лучи $a_1 \perp p$ и $b_1 \perp p$ (рис. 91, *б*).

Отложим на луче a отрезок OA, на луче a_1 отрезок O_1A_1, равный отрезку OA, на луче b отрезок OB и на луче b_1 отрезок O_1B_1, равный отрезку OB (рис. 91, *в*).

В прямоугольниках OAA_1O_1 и OBB_1O_1 стороны AA_1 и BB_1 равны их общей стороне OO_1 и параллельны ей. Поэтому $AA_1 = BB_1$ и $AA_1 \parallel BB_1$.

Следовательно, четырёхугольник ABB_1A_1 — параллелограмм (рис. 91, *г*), а значит, $AB = A_1B_1$. Поэтому треугольники ABO и $A_1B_1O_1$ равны (по трём сторонам) и угол ab равен углу a_1b_1. ■

Теперь можно дать такое определение: **величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.**

Углом между пересекающимися плоскостями называется величина меньшего из образованных ими двугранных углов. Если этот угол равен 90°, то плоскости называются взаимно **перпендикулярными.** Угол между параллельными плоскостями полагается равным 0°.

Угол между плоскостями α и β, как и величина двугранного угла с гранями α и β, обозначается $\angle\alpha\beta$.

Угол между гранями многогранника, имеющими общее ребро, — это величина соответствующего этим граням двугранного угла.

10.2 Свойства взаимно перпендикулярных плоскостей

Свойство 1. Прямая, лежащая в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная их общей прямой, перпендикулярна другой плоскости.

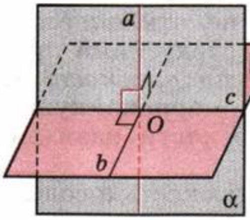


Рис. 92

Доказательство. Пусть плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c. Пусть прямая a лежит в плоскости α и $a \perp c$ (рис. 92). Прямая a пересекает c в некоторой точке O. Проведём в плоскости β через точку O прямую b, перпендикулярную прямой c. Так как $\alpha \perp \beta$, то $a \perp b$. Так как $a \perp b$ и $a \perp c$, то $a \perp \beta$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. ■

Второе свойство является утверждением, обратным первому свойству.

Свойство 2. Прямая, имеющая общую точку с одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежит в первой из них.

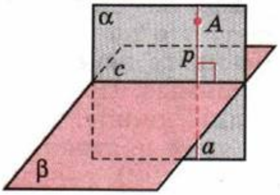


Рис. 93

Доказательство. Пусть плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c, прямая $a \perp \beta$ и a имеет с α общую точку A (рис. 93). Через точку A проведём в плоскости α прямую p, перпендикулярную прямой c. Согласно свойству 1 $p \perp \beta$. Прямые a и p проходят через точку A и перпендикулярны плоскости β. Поэтому они совпадают, так как через точку проходит лишь одна прямая, перпендикулярная некоторой плоскости. Поскольку прямая p лежит в плоскости α, то и прямая a лежит в плоскости α. ■

Следствием свойства 2 является такой признак перпендикулярности прямой и плоскости: **если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.**

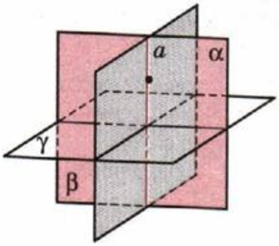


Рис. 94

Доказательство. Пусть две плоскости α и β, пересекающиеся по прямой a, перпендикулярны плоскости γ (рис. 94). Тогда через любую точку прямой a проведём прямую, перпендикулярную плоскости γ. Согласно свойству 2 эта прямая лежит и в плоскости α, и в плоскости β, т. е. совпадает с прямой a. Итак, $a \perp \gamma$. ■

10.3 Признак перпендикулярности плоскостей.
Начнём с практических примеров. Плоскость двери, навешенной на перпендикулярный полу косяк,

Рис. 95

перпендикулярна плоскости пола при любых положениях двери (рис. 95). Когда хотят проверить, вертикально ли установлена плоская поверхность (стена, забор и т. п.), то это делают с помощью отвеса — верёвки с грузом. Отвес всегда направлен вертикально, и стена стоит вертикально, если отвес, располагаясь вдоль неё, не отклоняется. Эти примеры подсказывают нам следующий простой *признак перпендикулярности плоскостей*: **если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.**

Доказательство. Пусть плоскость α содержит прямую a, перпендикулярную плоскости β (см. рис. 92). Тогда прямая a пересекает плоскость β в некоторой точке O. Точка O лежит на прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β. Проведём в плоскости β через точку O прямую b, перпендикулярную прямой c. Так как $a \perp \beta$, то $a \perp b$ и $a \perp c$. Это означает, что линейные углы двугранных углов, образованных пересекающимися плоскостями α и β, — прямые. Поэтому плоскости α и β взаимно перпендикулярны. ■

Отметим, что каждые две из трёх прямых a, b и c, рассмотренных сейчас (см. рис. 92), взаимно перпендикулярны. Если же построить ещё одну прямую, проходящую через точку O и перпендикулярную двум из этих трёх прямых, то она совпадёт с третьей прямой. Этот факт говорит о трёхмерности окружающего нас пространства: четвёртой прямой, перпендикулярной каждой из прямых a, b и c, нет.

Вопросы для самоконтроля

1 Как вычисляют величину двугранного угла?
2 Как вычислить угол между плоскостями?
3 Какие плоскости называются взаимно перпендикулярными?
4 Какие свойства взаимно перпендикулярных плоскостей вы знаете?
5 Какой признак перпендикулярности плоскостей вы знаете?

Задачи

10.1. Дополняем теорию | Постройте плоскость, которая перпендикулярна данной плоскости и проходит через данную: а) точку; б) пересекающую её прямую.

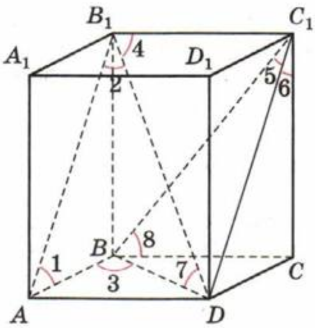


Рис. 96

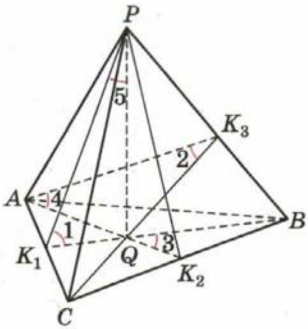


Рис. 97

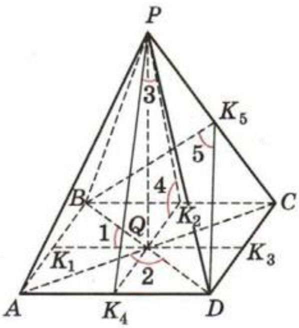


Рис. 98

10.2. Какие пары взаимно перпендикулярных плоскостей можно указать в: а) кубе; б) прямоугольном параллелепипеде; в) прямоугольном тетраэдре, т. е. в тетраэдре, три ребра которого, идущие из одной вершины, взаимно перпендикулярны; г) правильной четырёхугольной пирамиде (плоскости определяются вершинами этих многогранников)?

10.3. Дополняем теорию | Через середины сторон правильного многоугольника проведены плоскости, перпендикулярные этим сторонам. Докажите, что эти плоскости имеют общую прямую, которая перпендикулярна плоскости многоугольника.

Задачи к п. 10.1

10.4. а) Какой из занумерованных углов на рисунке 96 в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вы можете записать как линейный угол двугранного угла между гранями этого параллелепипеда и его диагональными плоскостями? б) На рисунке 97 изображён правильный тетраэдр $PABC$. Точки K_1, K_2, K_3 — середины его рёбер. Точка Q — центр основания. Какой из занумерованных углов вы можете записать как линейный угол двугранного угла между гранями тетраэдра и плоскостями его сечений?

10.5. На рисунке 98 изображена пирамида $PABCD$, все рёбра которой равны. Точки K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 — середины рёбер пирамиды, точка Q — центр её основания. Укажите, линейным углом какого двугранного угла является каждый из занумерованных углов.

10.6. Дан правильный тетраэдр $PABC$. Нарисуйте линейные углы двугранных углов при: а) AC; б) AP.

10.7. В пирамиде $PABCD$ все рёбра равны. Нарисуйте линейные углы двугранных углов: а) при ребре AD; б) при ребре PD; в) образованных гранями PAD и PBC.

10.8. Дана прямая треугольная призма. Как вычислить углы между её боковыми гранями? Сделайте обобщение для n-угольной прямой призмы.

10.9. Две боковые грани прямой треугольной призмы перпендикулярны, а третья составляет с одной из них угол φ. а) Какой угол она составляет с другой гранью? б) Пусть наибольшее ребро основания этой призмы равно 1. Чему равны остальные рёбра основания?

10.10. Плоскости α, β, γ пересекаются по трём параллельным прямым. Плоскость β образует с α и γ угол φ. Найдите угол между α и γ.

10.11. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите угол φ, образованный плоскостями: а) AB_1C_1 и ABC; б) BB_1D_1 и AA_1C; в) DA_1C_1 и BA_1C_1.

10.12. Дан правильный тетраэдр. Вычислите угол φ, образованный: а) его гранями; б) плоскостями, проходящими через боковое ребро и высоту тетраэдра.

10.13. В треугольной пирамиде $PABC$ ребро PB перпендикулярно (ABC). Треугольник ABC равносторонний. Как вы будете искать угол между плоскостями: а) PAB и PBC; б) PAC и BAC; в) PAC и PBC?

10.14. Дана четырёхугольная пирамида $PABCD$, в основании которой квадрат, и ребро PB перпендикулярно основанию. Как вы будете искать угол между плоскостями: а) PAD и ABC; б) PCD и ABC; в) PAD и PCD; г) PAD и PCB?

10.15. Укажите все пары перпендикулярных плоскостей на рисунке 83 на с. 67. Если таковых не окажется, то при каких дополнительных условиях они появятся?

10.16. Треугольники ABC и ABD прямоугольные ($\angle B = 90°$) и лежат в перпендикулярных плоскостях. Докажите, что: а) $(ABC) \perp (BCD)$; б) $(ABD) \perp (BCD)$; в)* плоскость ACD не перпендикулярна плоскостям этих треугольников.

10.17. Треугольники ABC и ABD равносторонние и лежат в перпендикулярных плоскостях. а) Докажите, что плоскость CDK перпендикулярна плоскости каждого из них, если точка K — середина стороны AB. б) Докажите, что другой такой же плоскости, как (CDK) (см. случай «а»), через прямую CD не провести. в)* Будут ли перпендикулярны плоскости ACD и BCD? Изменятся ли результаты, если вместо равносторонних треугольников взять равные равнобедренные треугольники с основанием AB?

Задачи к п. 10.2

10.18. Два квадрата $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Докажите, что: а) $AD \perp (ABC_1)$; б) $BC_1 \perp (ADC)$; в) AC не перпендикулярен плоскости ABD_1; г) отметьте точку на CD и нарисуйте из неё перпендикуляр на плоскость ABC_1; д) отметьте точку на BD_1 и нарисуйте из неё перпендикуляр на (ABC).

10.19. Два равносторонних треугольника ABC и ABD лежат в перпендикулярных плоскостях. а) Нарисуйте перпендикуляр из точки D на плоскость ABC; б) отметьте точку L на AC и нарисуйте перпендикуляр из L на плоскость ABD; в) нарисуйте перпендикуляр, проходящий через точку B к плоскости ABC; г)* какие точки этих треугольников наиболее удалены друг от друга?

10.20. Основанием четырёхугольной пирамиды является равнобедренная трапеция и две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания трапеции. Нарисуйте высоту пирамиды. Рассмотрите два случая: 1) перпендикулярны основанию соседние грани и 2) перпендикулярны основанию противоположные грани. Как, зная длины рёбер, вычислить высоту пирамиды?

Задачи к п. 10.3

10.21. Два квадрата $ABCD$ и $ABKL$ лежат в перпендикулярных плоскостях.
1) Докажите, что: а) плоскость ADL перпендикулярна плоскости каждого квадрата; б) плоскость BCK перпендикулярна плоскости каждого квадрата; в) $(ADK) \perp (ABK)$; г) $(ACL) \perp (ABC)$; д) $(KLD) \perp (ADL)$; е) $(ADK) \perp (BCL)$.
2) Будут ли перпендикулярны плоскости BDK и ACL?
3) Какой угол образуют с плоскостями квадратов плоскости: а) CDL; б) KLM, где M — середина CD; в) ACK?
4) Какой угол образуют плоскости ACK и BDL?

10.22. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте его сечение плоскостью, которая: а) проходит через точку A и перпендикулярна плоскости ABC; б) проходит через точку A и перпендикулярна плоскости BB_1D; в)* проходит через точку A и перпендикулярна плоскости BA_1D; г) проходит через прямую AC_1 и перпендикулярна плоскости $A_1B_1D_1$; д) проходит через прямую AD_1 и перпендикулярна плоскости BDD_1.

10.23. Дана правильная четырёхугольная пирамида $PABCD$. Нарисуйте её сечение плоскостью, проходящей через: а) вершину P и перпендикулярной основанию; б) ребро PA и перпендикулярной плоскости PBD; в)* высоту пирамиды PQ и перпендикулярной плоскости CPD.

10.24. В четырёхугольной пирамиде основанием является прямоугольник. Две соседние боковые её грани перпендикулярны основанию. Укажите все пары перпендикулярных граней этой пирамиды.

§11 Параллельность плоскостей

11.1 Параллельность плоскостей, перпендикулярных одной прямой.

Напомним, что **две плоскости**, не имеющие общих точек, называются **параллельными**. Из теоремы о плоскости, перпендикулярной прямой (п. 9.2), следует, что *две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны* (рис. 99). Действительно, такие плоскости не имеют общей точки. В противном случае через одну точку проходили бы две плоскости, перпендикулярные одной прямой, что невозможно по указанной теореме.

Вспомните, что аналогичный признак параллельности прямых был доказан в планиметрии.

Доказанный нами простой признак параллельности плоскостей позволяет построить такие плоскости. Для этого достаточно взять какую-нибудь прямую и построить две перпендикулярные ей плоскости (п. 9.2).

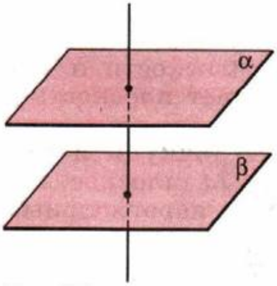


Рис. 99

11.2 Прямая, перпендикулярная двум параллельным плоскостям.

Прямая, перпендикулярная двум параллельным плоскостям. Зависимость между параллельностью плоскостей и перпендикулярностью прямой и плоскости аналогична зависимости между параллельностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости (теорема 9), рассмотренной в § 8. А именно наряду с доказанным в 11.1 признаком параллельности плоскостей имеет место и следующее обратное ему утверждение:

Теорема 12 *(о прямой, перпендикулярной параллельным плоскостям).* **Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.**

Эта теорема является ещё одним признаком перпендикулярности прямой и плоскости. При её доказательстве используются две простые леммы:

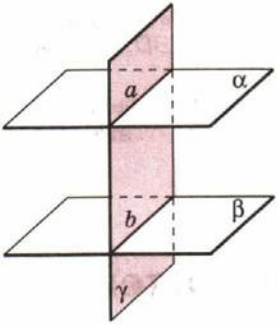


Рис. 100

Лемма 1 *(о пересечении параллельных плоскостей третьей плоскостью).* **Прямые, по которым две параллельные плоскости пересекают третью плоскость, параллельны.**

Доказательство. Пусть параллельные плоскости α и β пересекают плоскость γ по прямым a и b соответственно (рис. 100). Прямые a и b лежат в одной плоскости γ. Они не имеют общих точек, так как плоскости α и β не имеют общих точек. Поэтому прямые a и b параллельны. ■

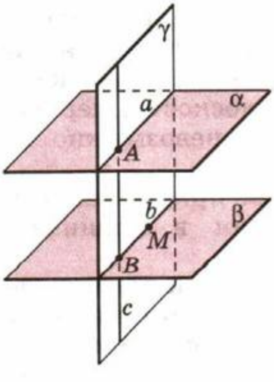


Рис. 101

Лемма 2 *(о прямой, пересекающей параллельные плоскости).* **Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую из них.**

Доказательство. Пусть плоскости α и β параллельны и прямая c пересекает плоскость α в точке A (рис. 101).

Возьмём в плоскости β любую точку M и проведём через прямую c и точку M плоскость γ. Она пересечёт плоскости α и β по параллельным прямым a и b.

Прямая c лежит в плоскости γ и пересекает прямую a в точке A. Поэтому прямая c пересечёт

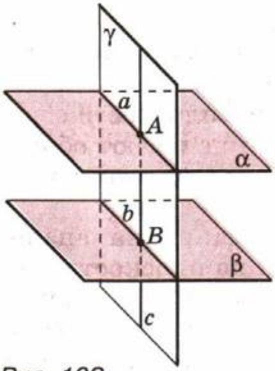


Рис. 102

и прямую b, параллельную прямой a и лежащую в плоскости γ, в некоторой точке B. Точка B и является точкой пересечения прямой c и плоскости β, так как лежать в плоскости β прямая c не может (объясните!). ■

Теперь докажем теорему 12.

Доказательство теоремы 12. Пусть плоскости α и β параллельны и прямая c перпендикулярна плоскости α (рис. 102).

Прямая c пересекает плоскость α в некоторой точке A. Поэтому по лемме 2 прямая c пересекает и плоскость β в некоторой точке B. Проведём через точку B в плоскости β любую прямую b и покажем, что $c \perp b$.

Пусть γ — плоскость, проходящая через прямые b и c. Она пересекает плоскости α и β по параллельным прямым a и b (по лемме 1). Так как $c \perp \alpha$, то $c \perp a$. А поскольку $b \parallel a$ и все прямые a, b, c лежат в плоскости γ, то $c \perp b$. Следовательно, $c \perp \beta$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости). ■

11.3 Основная теорема о параллельных плоскостях

Теорема 13. Через каждую точку, не лежащую в данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство. Пусть даны плоскость α и не лежащая в ней точка A (рис. 103). Проведём через точку A прямую a, перпендикулярную плоскости α (см. п. 9.1). Через точку A проведём плоскость β, перпендикулярную прямой a (см. п. 9.2). Плоскости α и β параллельны, так как они перпендикулярны прямой a. Мы доказали существование плоскости β, проходящей через точку A и параллельной плоскости α.

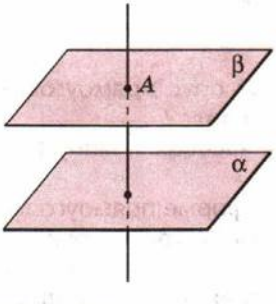


Рис. 103

Докажем единственность такой плоскости. Пусть γ — плоскость, проходящая через точку A и параллельная плоскости α. Так как $\gamma \parallel \alpha$ и $a \perp \alpha$, то $a \perp \gamma$ (по теореме 12). А поскольку через точку A проходит лишь одна плоскость, перпендикулярная прямой a (п. 9.2), то плоскости β и γ совпадают. Поэтому β — единственная плоскость, проходящая через точку A и параллельная плоскости α. ■

Следствие (о двух плоскостях, параллельных третьей). **Две плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны.**

Доказательство. Если две плоскости α и β параллельны плоскости γ, то они не имеют общей точки: в противном случае через эту точку проходят две плоскости, параллельные γ. ■

Замечание. Обратите внимание на аналогию с параллельными прямыми на плоскости: начиная с определения всем доказанным здесь предложениям о параллельных плоскостях соответствуют такие же предложения о параллельных прямых на плоскости. Сформулируйте их.

Вопросы для самоконтроля

1 Какие вы знаете признаки параллельности плоскостей?

2 Какие теоремы о параллельных плоскостях аналогичны теоремам о параллельных прямых?

3 Две плоскости параллельны. Как может быть расположена относительно них третья плоскость?

Задачи

11.1. Дополняем теорию | Докажите, что параллельны плоскости: а) противоположных граней прямоугольного параллелепипеда; б) оснований прямой призмы.

Задачи к п. 11.1

11.2. а) Два прямоугольника $ABCD$ и $DCFE$ не лежат в одной плоскости. Объясните, почему плоскости ADE и BCF параллельны. б) Два прямоугольника, не лежащие в одной плоскости, имеют общую среднюю линию. Докажите, что их пересекающиеся стороны лежат в параллельных плоскостях.

11.3. Прикладная геометрия | Имеется деревянный брус прямоугольного сечения. Как получить два параллельных его распила?

11.4. Прикладная геометрия | Объясните, почему часовая и минутная стрелки часов движутся в параллельных плоскостях.

11.5. Прикладная геометрия | а) Бетонная плита в форме прямоугольного параллелепипеда удерживается краном на четырёх тросах равной длины. Как закрепить тросы на плите, чтобы она была в горизонтальном положении? б) Как за крюк на потолке с помощью трёх верёвок подвесить кольцо так, чтобы плоскость его была горизонтальна?

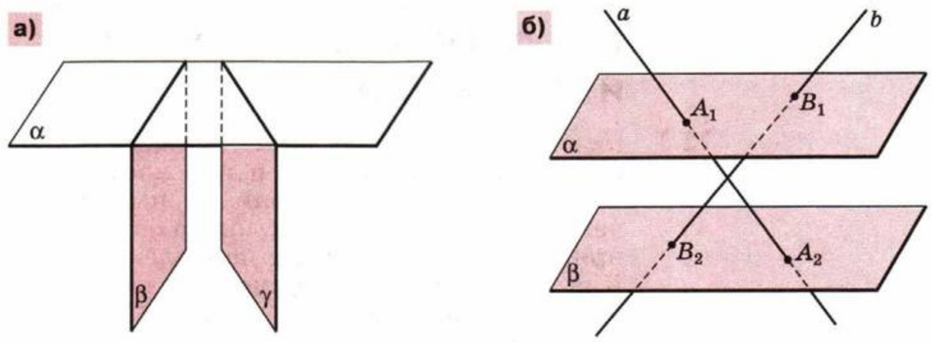


Рис. 104

Задачи к п. 11.2

11.6. Исследуем | Будут ли две плоскости параллельны, если: а) они пересекают третью по параллельным прямым; б) они проходят через две параллельные прямые; в) каждая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую?

11.7. а) Глядя на рисунок 104, *а*, скажите, как расположены плоскости β и γ. б) Глядя на рисунок 104, *б*, скажите, как расположены прямые *a* и *b*, если известно, что плоскости α и β параллельны.

11.8. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, точка *P* — центр симметрии грани $A_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте его сечение плоскостью, проходящей через *P* и перпендикулярно: а) (A_1B_1); б) (AD).

Задачи к п. 11.3

11.9. Дана правильная пирамида *PABC*. Точка *Q* — центр её основания. 1) Нарисуйте сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости *ABC* и проходящей через: а) точку *T* на ребре *PB*; б) точку *M* внутри медианы *PL* грани *PAC*; в)* точку *K* внутри отрезка *PQ*. 2) Докажите, что каждое такое сечение (см. случаи а) — в) из п. 1) будет равносторонним треугольником. 3) Какую часть составляет площадь сечения (см. случаи а) — в) из п. 1) от площади треугольника *ABC*, когда оно проходит через середину данного отрезка?

11.10. а) Решите предыдущую задачу для правильной четырёхугольной пирамиды. б) Какие предположения вы можете сделать для правильной *n*-угольной пирамиды?

11.11. 1) Нарисуйте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей параллельно плоскости *ABC* через точку внутри отрезка: а) AA_1; б) CD_1; в) B_1D. 2) Докажите, что это сечение в каждом случае (см. а) — в) из п. 1) будет прямоугольником.

11.12. Составьте и решите предыдущую задачу для правильной призмы.

11.13. Ученик сказал: «Если две плоскости перпендикулярны третьей и проходят через параллельные прямые, то они параллельны». А учитель опроверг это утверждение. Как?

§ 12 Параллельность прямой и плоскости

12.1 Признак параллельности прямой и плоскости.

Напомним, что **прямая и плоскость** называются **параллельными**, если они не имеют общих точек. Говорят также, что плоскость параллельна прямой или что прямая параллельна плоскости. Для параллельности прямой a и плоскости α применяется обозначение $a \parallel \alpha$ или $\alpha \parallel a$.

Существование прямых, параллельных плоскости, очевидно, так как любая прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, не имеет общих точек с другой плоскостью и потому ей параллельна (см. рис. 100). Так что через одну точку, не лежащую в данной плоскости, проходит бесконечно много прямых, параллельных этой плоскости.

Часто параллельность прямой и плоскости устанавливают с помощью следующей теоремы — *признака параллельности прямой и плоскости*:

Теорема 14. Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в данной плоскости, то она параллельна этой плоскости.

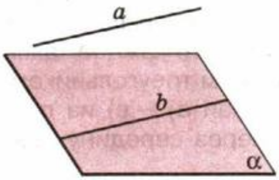


Рис. 105

Доказательство. Пусть прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, но не лежит в этой плоскости (рис. 105). Прямая a не может пересекать плоскость α, так как в этом случае прямые a и b скрещивались бы (по признаку скрещивающихся прямых), а это противоречит условию теоремы. Поэтому $a \parallel \alpha$. ■

Поищите другие доказательства этой простой теоремы. В ней делается вывод о параллельности прямой и плоскости, исходя из параллельности прямых. В следующей лемме, наоборот, делается вывод о параллельности прямых, исходя из параллельности прямой и плоскости.

Лемма *(о параллельности прямых)*. **Пусть плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость. Тогда данная прямая параллельна прямой, по которой пересекаются данные плоскости.**

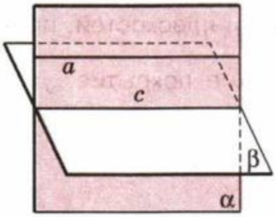


Рис. 106

Доказательство. Пусть прямая a лежит в плоскости α и параллельна плоскости β и плоскости α и β пересекаются по прямой c (рис. 106). Тогда прямая a параллельна прямой c.

Действительно, во-первых, прямая a лежит с прямой c в одной плоскости α. Во-вторых, прямая a не может пересекать прямую c, так как в противном случае прямая a пересекала бы плоскость β, что невозможно. Следовательно, $a \parallel c$. ■

Эта лемма ещё один признак параллельности прямых.

12.2 Признак параллельности плоскостей. Параллельность прямых и параллельность плоскостей связывает следующий признак параллельности плоскостей:

Теорема 15. Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

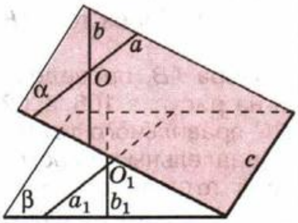


Рис. 107

Доказательство. Пусть даны две плоскости α и β. В плоскости α лежат прямые a и b, пересекающиеся в точке O, а в плоскости β лежат прямые a_1 и b_1 (рис. 107). Пусть, кроме того, $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$. Прямые a и b параллельны плоскости β (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Допустим, что плоскости α и β пересекаются по прямой c. Тогда прямая a параллельна прямой c (по лемме п. 12.1). Аналогично $b \parallel c$. Итак, если допустим, что плоскости α и β пересекаются, то получаем, что через точку O проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. А это невозможно. Поэтому плоскости α и β не пересекаются, т. е. $\alpha \parallel \beta$. ■

Вопросы для самоконтроля

1 Какие вы знаете признаки параллельности: а) прямой и плоскости; б) двух плоскостей; в) двух прямых?

2 Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b лежит в α. В каком взаимном расположении могут находиться a и b?

3 Даны плоскость α и не лежащая на ней точка A. Сколько можно провести прямых, проходящих через A и параллельных α? Какую фигуру заполняют эти прямые?

4 Прямые a и b параллельны. Сколько можно провести плоскостей, проходящих через b и параллельных a? Какую фигуру они заполняют?

5 Прямые a и b скрещиваются. Сколько можно провести плоскостей, проходящих через прямую a и параллельных прямой b?

6 Две жерди уложены горизонтально. Всегда ли плоское покрытие, уложенное на них, также горизонтально?

Задачи

12.1. Дополняем теорию | Докажите следующие признаки параллельности прямой и плоскости (при условии, что прямая не лежит в этой плоскости). Прямая и плоскость параллельны, если: а) существует плоскость, параллельная данным прямой и плоскости; б) существует прямая, параллельная данным прямой и плоскости; в) существует прямая, перпендикулярная данным прямой и плоскости; г) существует плоскость, перпендикулярная данным прямой и плоскости.

12.2. Дополняем теорию | Докажите, что параллельны: а) противоположные грани параллелепипеда; б) основания призмы.

Задачи к п. 12.1

12.3. Исследуем | Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки K, L, M, N — середины рёбер B_1C_1, C_1D_1, BC, A_1B_1 соответственно. Будет ли прямая AA_1 параллельна плоскости: а) BCC_1; б) BDD_1; в) BDC_1; г) KLM; д) CKN; е) LMN; ж) B_1DL?

12.4. Через точку K внутри ребра P тетраэдра $PABC$ проведите отрезок, параллельный (ABC), в грани: а) PAB; б) PAC. Нарисуйте фигуру, которую заполнят в тетраэдре все такие отрезки. А если проводить через точку K отрезки, параллельные (PBC)?

12.5. В тетраэдре $PABC$ через точку K, лежащую внутри ребра AB, проведено сечение, параллельное прямой AC. Есть ли ошибки на рисунке 108, *а*, *б*?

12.6. Исследуем | а) Через точку Q — центр грани ABC правильного тетраэдра $PABC$ проводятся всевозможные прямые, параллельные плоскости PAC. Какой из отрезков этих прямых, лежащих в тетраэдре, имеет наибольшую длину? наименьшую длину? б) Составьте и решите задачу, аналогичную задаче, данной в п. а), для правильной четырёхугольной пирамиды, у которой все рёбра равны.

12.7. Исследуем | Нарисуйте параллелепипед. Нарисуйте его сечение плоскостью, проходящей через одно из его рёбер. Укажите рёбра параллелепипеда, параллельные этому сечению. Установите вид этого сечения.

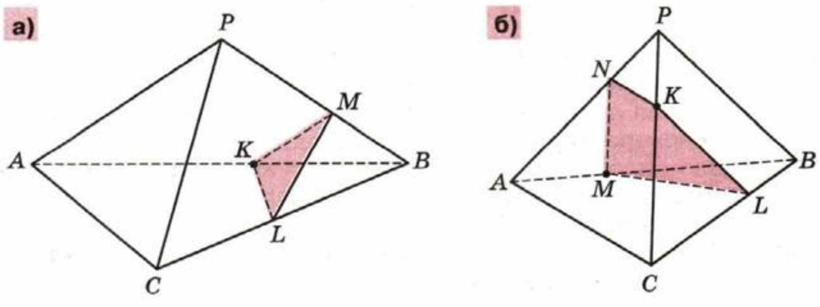


Рис. 108

Установите вид такого сечения в прямоугольном параллелепипеде. Может ли одно из таких сечений быть квадратом?

12.8. Исследуем | Дана правильная четырёхугольная пирамида. а) Нарисуйте её сечение, содержащее ребро основания. Докажите, что оно параллельно другому ребру основания. Установите вид этого сечения. б) Нарисуйте сечение пирамиды плоскостью, содержащей диагональ основания и параллельной боковому ребру. Установите вид этого сечения. в) Нарисуйте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину и параллельной ребру основания. Какое из таких сечений имеет наибольшую и наименьшую площадь?

Задачи к п. 11.2

12.9. Два параллелограмма $ABCD$ и ABC_1D_1 не лежат в одной плоскости. Докажите, что плоскости BCC_1 и ADD_1 параллельны.

12.10. Из точки P выходят три луча: PA, PB, PC. На них взяты точки A_1, B_1, C_1, причём $PA_1 = \frac{1}{2}PA$, $PB_1 = \frac{1}{2}PB$, $PC_1 = \frac{1}{2}PC$. Докажите, что $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$. Как можно обобщить эту задачу? Составьте аналогичную задачу, взяв точки A_1, B_1 и C_1 на продолжениях лучей PA, PB, PC.

12.11. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Докажите, что плоскости A_1BD и B_1D_1C параллельны. б) Укажите аналогичные пары параллельных сечений параллелепипеда.

12.12. Две стороны треугольника параллельны плоскости α. Докажите, что и третья его сторона параллельна плоскости α.

§ 13 Ортогональное проектирование

13.1 Ортогональное проектирование на прямую и на плоскость.

Ортогональное проектирование на прямую и на плоскость. Ортогональная проекция точки на прямую или на плоскость в стереометрии определяется дословно так же, как проекция точки на прямую в планиметрии. А именно если точка не лежит на данной прямой (плоскости), то **ортогональной проекцией точки на прямую (на плоскость)** называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую (плоскость). Если же точка лежит на прямой (на плоскости), то она и есть своя проекция на эту прямую (плоскость) (рис. 109, *а*). **Проекцией же фигуры F на плоскость** α называется фигура F', состоящая из проекций всех точек фигуры F на эту плоскость (рис. 109, *б*). О проекции наклонной на плоскость уже говорилось в п. 6.1.

Поскольку все прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны друг другу, то орто-

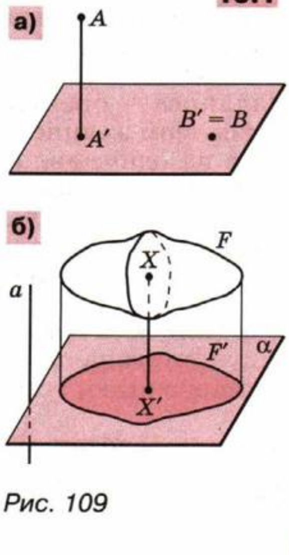


Рис. 109

Гаспар Монж

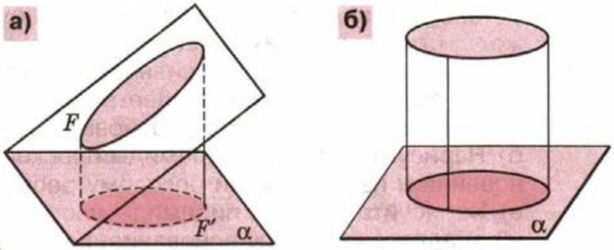


Рис. 110

гональное проектирование на плоскость является частным случаем параллельного проектирования и тем самым обладает всеми свойствами параллельного проектирования.

Кроме точек и отрезков, рисуя изображение сферы, цилиндра или конуса, мы будем встречаться с проекцией окружности на плоскость (когда плоскость окружности не перпендикулярна плоскости проекции). Кривая, которая является проекцией окружности в этом случае, называется **эллипсом** (рис. 110, *а*). Эллипсом является и параллельная проекция окружности на плоскость (если направление проектирования не параллельно плоскости окружности). Если плоскость окружности параллельна плоскости проекции, то проекцией, очевидно, является равная ей окружность (рис. 110, *б*). Поэтому окружность является частным случаем эллипса. Эллипсы обладают многими замечательными свойствами. Эллипс имеет центр симметрии и две взаимно перпендикулярные оси симметрии. По эллипсам (эллиптическим орбитам) двигаются планеты вокруг Солнца. Солнце, однако, находится не в центре эллипса — орбиты планеты, а в точке, называемой **фокусом эллипса**.

Ортогональное проектирование на одну, две и три плоскости широко используется в технике, в черчении. Изображение предмета в проекциях позволяет судить о его устройстве, без чего невозможно ни конструирование предмета, ни его изготовление.

В дальнейшем, говоря «проекция» или «проектирование», мы имеем в виду ортогональное проектирование и ортогональную проекцию, если нет специальных оговорок.

На ортогональном проектировании основан такой важный для инженеров раздел прикладной математики, как «Начертательная геометрия».

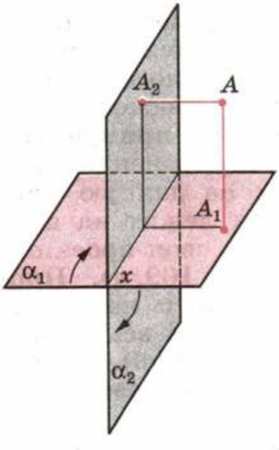


Рис. 111

Начертательная геометрия была создана знаменитым французским математиком Гаспаром Монжем (1746—1818). В её основе лежит идея о том, что положение любой точки пространства можно задать её ортогональными проекциями на две взаимно перпендикулярные плоскости α_1 и α_2 (рис. 111).

13.2 Теорема о трёх перпендикулярах. Вы уже давно знаете, что перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, короче любой наклонной, соединяющей эту точку с точкой данной прямой. Вы знаете и аналогичное свойство перпендикуляра, опущенного на плоскость. Эти два минимальных свойства перпендикуляра объединяет следующая важная теорема:

Теорема 16 *(о трёх перпендикулярах).* **Наклонная к плоскости перпендикулярна прямой, лежащей в этой плоскости, тогда и только тогда, когда проекция наклонной перпендикулярна этой прямой.**

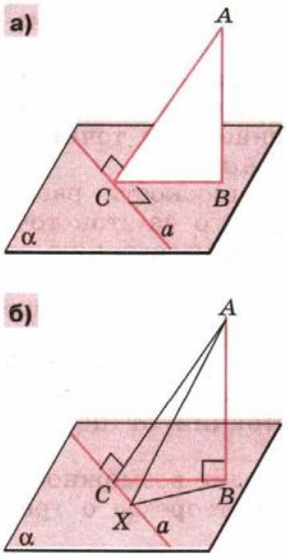


Рис. 112

Доказательство. Пусть даны наклонная AC к плоскости α, её проекция BC на эту плоскость и прямая a, лежащая в плоскости α и проходящая через точку C (рис. 112, a).

В теореме два утверждения: 1) *если* $AC \perp a$, *то* $BC \perp a$; 2) обратно, *если* $BC \perp a$, *то* $AC \perp a$.

Докажем их. Возьмём переменную точку X прямой a (рис. 112, $б$) и рассмотрим две величины AX^2 и BX^2. Так как $AB \perp \alpha$, то треугольник ABX прямоугольный. Поэтому $AX^2 = AB^2 + BX^2$. Значит, эти величины отличаются на постоянное слагаемое $h = AB^2$:

$$AX^2 = BX^2 + h. \qquad (1)$$

Поэтому эти величины свои наименьшие значения принимают одновременно — в одной и той же точке. Из этого и следуют оба утверждения теоремы.

1) Пусть $AC \perp a$. Тогда перпендикуляр AC к прямой a короче любой наклонной AX к этой прямой. Значит, и отрезок BC короче любого отрезка BX, когда $X \neq C$. Поэтому $BC \perp a$. Первое утверждение доказано. Докажем второе.

2) Пусть $BC \perp a$. Тогда перпендикуляр BC к прямой a короче любой наклонной BX к этой прямой. Поэтому и $AC < AX$, если $X \neq C$. Следовательно, $AC \perp a$. ■

В доказанной теореме рассматриваются три перпендикуляра: $AB \perp \alpha$, $AC \perp a$, $BC \perp a$. Отсюда и её название — **т е о р е м а о т р ё х п е р п е н д и к у л я р а х**. Эта теорема связывает также проектирование на прямую и проектирование на плоскость. Согласно этой теореме проекцию точки A на прямую a — точку C — можно получить и так: сначала спроектировать точку A на плоскость α в точку B, а затем спроектировать точку B на прямую a. В результате получим ту же самую точку C.

13.3 Расстояние от точки до фигуры.

Расстояние от точки до фигуры измеряется по кратчайшему пути. Поэтому **расстоянием от данной точки A до фигуры** F называется расстояние от этой точки до ближайшей к A точке фигуры F. **Точка** фигуры F, **ближайшая к** A, — это такая точка $B \in F$ (рис. 113), что для всех точек X фигуры F $|AB| \leqslant |AX|$.

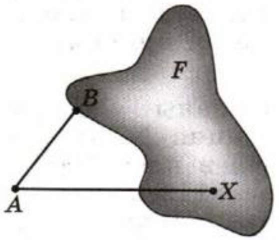


Рис. 113

Иначе говоря, если точка A не принадлежит фигуре F, то **отрезок** AB — **кратчайший** из всех отрезков AX, соединяющих точку A с точками фигуры F. (Если же $A \in F$, то ясно, что точка A оказывается ближайшей к самой себе. В дальнейшем случай, когда $A \in F$, мы не рассматриваем.)

Расстояние от точки A до фигуры F обозначаем $|AF|$.

Рассмотрим несколько простых п р и м е р о в.

1. Расстояние от точки A до прямой a равно длине перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую a. Обозначаем его $|Aa|$.

2. Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость, или, что то же, расстоянию от точки до её проекции на плоскость.

Эти два утверждения вытекают из того, что перпендикуляр короче наклонной.

3. Расстояние от центра окружности до самой окружности равно радиусу. Все точки окружности находятся на одном расстоянии от центра, они все ближайшие к нему.

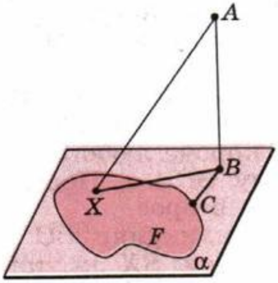


Рис. 114

Понятие ближайшей точки даёт возможность получить интересное обобщение теоремы о трёх перпендикулярах.

Заменим в этой теореме прямую a на произвольную фигуру F в плоскости α (рис. 114).

Пусть X — переменная точка фигуры F. Из равенства (1) делаем тот же вывод о наименьших расстояниях AX и BX; они становятся наименьшими одновременно.

Получаем такое обобщение теоремы о трёх перпендикулярах:

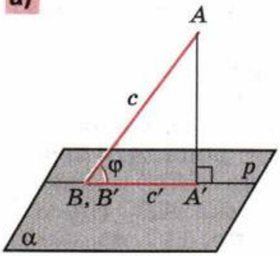
Теорема *(о ближайшей точке).* **Пусть фигура F лежит в плоскости α, A — некоторая точка, не принадлежащая α, и B — её проекция на α. Точка фигуры F будет ближайшей к точке A тогда и только тогда, когда она является ближайшей к её проекции B.**

Замечание. 1. Из теоремы о ближайшей точке следует такое утверждение: из данной точки A в ближайшую точку плоской фигуры F можно попасть так: сначала в ближайшую к A точку B самой плоскости, а потом из точки B в ближайшую к ней точку фигуры F.

2. Теорема о трёх перпендикулярах оказалась, как мы видим, только частным случаем теоремы о ближайшей точке, относящейся к любой плоской фигуре. При этом доказательство её ничуть не сложнее. Это примечательно!

Один из моментов в развитии математики состоит в том, что результаты, которые прежде относились к более специальным фигурам, уравнениям, функциям или иным объектам математики, обобщаются позже на гораздо более общие объекты. Теорема о трёх перпендикулярах восходит к древним грекам (но доказывали они её по-другому), а теорема о ближайшей точке принадлежит геометрии XX в.

а)



б)

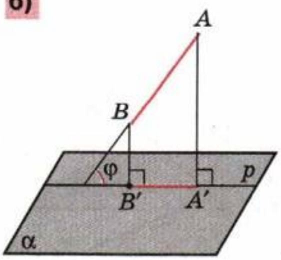


Рис. 115

13.4 Площадь проекции многоугольника.

Вам хорошо известно, что длина c отрезка AB и длина c' его проекции $A'B'$ на некоторую прямую p (или плоскость α) связаны равенством

$$c' = c \cos\varphi, \qquad (2)$$

где φ — угол наклона прямой AB к прямой p или к плоскости α (рис. 115). Если $\varphi \neq 0°$ или $\varphi \neq 90°$, то равенство (2) выражает длину катета c' прямоугольного треугольника через длину c его гипотенузы и косинус прилежащего к катету острого угла φ.

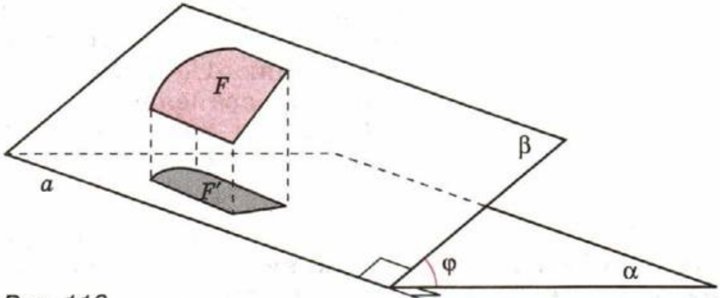


Рис. 116

Теорема о трёх перпендикулярах позволяет доказать аналогичную формулу

$$S' = S \cos \varphi \qquad (3)$$

для площади S некоторой фигуры F и площади S её проекции F' на некоторую плоскость α. Угол φ в равенстве (3) — это угол наклона плоскости β, в которой лежит фигура F, к плоскости α (рис. 116).

Равенство (3) очевидно для случая, когда $\varphi = 90°$ (в этом случае F' лежит на прямой и $S' = 0$, а также $\cos 90° = 0$), и для случая, когда $\varphi = 0°$ (в этом случае плоскости α и β параллельны или совпадают, фигура F' равна фигуре F и $\cos 0° = 1$). Поэтому будем считать, что угол φ острый.

□ Равенство (3) сначала докажем для случая, когда фигура F — некоторый треугольник ABC. Прямую, по которой пересекаются плоскости α и β, обозначим через a. Если сторона AB лежит на a, то высота $C'H$ треугольника ABC' является проекцией высоты CH треугольника ABC (по теореме о трёх перпендикулярах, рис. 117, a).

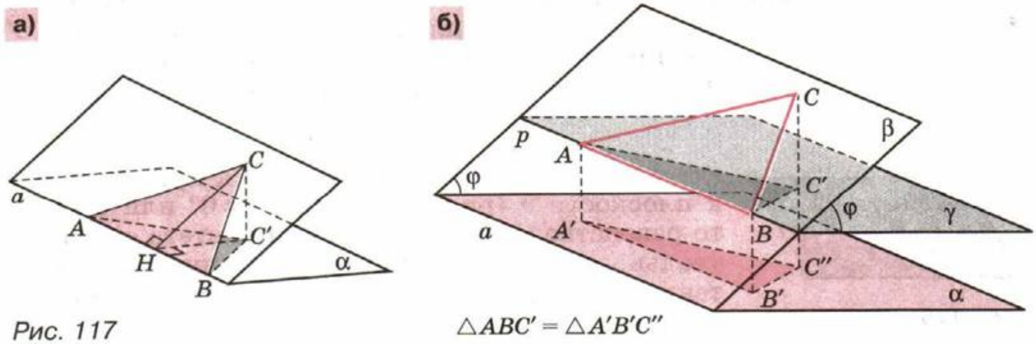


Рис. 117

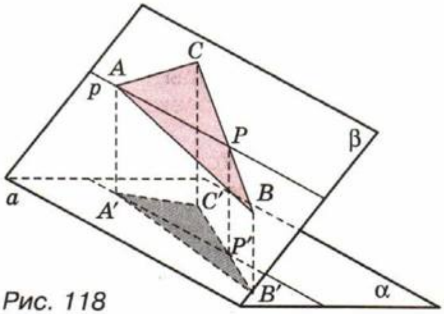


Рис. 118

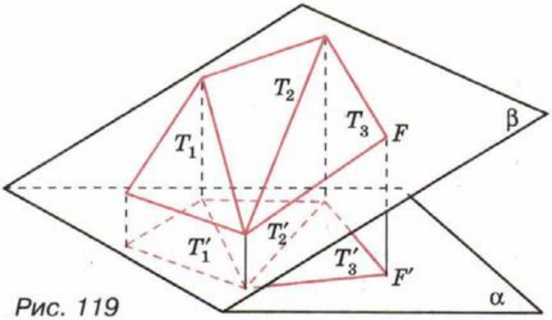


Рис. 119

Тогда $C'H = CH \cos\varphi$ и $S' = 0{,}5AB \cdot C'H = 0{,}5ABC \cdot CH \cos\varphi = S \cos\varphi$.

Для случая, когда AB лежит на a, равенство (3) доказано.

Если сторона AB параллельна прямой a, то проведём через прямую AB плоскость γ, параллельную плоскости α, и сведём доказательство равенства (3) к уже рассмотренному случаю (рис. 117, *б*).

Пусть у треугольника ABC нет сторон, параллельных прямой a (или лежащих на a). Тогда через одну из его вершин (например, через вершину A) проходит прямая p, параллельная прямой a, которая разбивает треугольник ABC на два треугольника ABP и ACP, у которых уже есть такая сторона AP (рис. 118). Тогда

$$\begin{aligned} S(\triangle A'B'C') &= S(\triangle A'B'P') + S(\triangle A'C'P') = \\ &= S(\triangle ABP)\cos\varphi + S(\triangle ACP)\cos\varphi = \\ &= (S(\triangle ABP) + S(\triangle ACP))\cos\varphi = \\ &= S(\triangle ABC)\cos\varphi. \end{aligned} \tag{4}$$

Равенство (3) доказано для любых треугольников.

Если фигура F — многоугольник, то, разбивая её на треугольники, доказываем равенство (3) аналогично тому, как это было доказано в цепочке равенств (4) (рис. 119).

Наконец, для произвольных фигур F равенство (3) можно доказать, приближая их многоугольными фигурами. Например, площадь S' фигуры, ограниченной эллипсом, который получен проектированием окружности радиуса a, вычисляется по формуле $S' = \pi ab$, где b — длина проекции радиуса окружности, перпендикулярного прямой пересечения плоскости окружности и плоскости проекции. ■

Вопросы для самоконтроля

1 Как получить ортогональную проекцию: а) точки; б) фигуры?
2 Какая фигура является ортогональной проекцией: а) отрезка; б) окружности?
3 Как найти расстояния от точки до: а) прямой; б) плоскости?
4 Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах. Какие два утверждения она содержит?
5 Как можно найти расстояние от точки до плоской фигуры? Приведите реальные примеры, иллюстрирующие теорему о ближайшей точке.
6 Фигура F лежит в плоскости α, точка A не лежит в этой плоскости, точка B фигуры F является ближайшей к точке A. Следует ли отсюда, что прямая AB перпендикулярна плоскости α?

Задачи

13.1. Дополняем теорию | Докажите, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (длины, ширины, высоты).

13.2. Дополняем теорию | Треугольник ABC правильный со стороной, равной 1. Точка O — его центр, точка X — переменная точка прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку O. Пусть $d_1 = |X(ABC)|$, $d_2 = |XA|$, $d_3 = |X(AB)|$. Установите зависимости между этими величинами. Получите также аналогичные зависимости для правильного n-угольника.

13.3. Дополняем теорию | Лучи OA и OB лежат в плоскости α. Луч OC образует с ними равные углы. Какое положение на плоскости α занимает проекция луча OC на эту плоскость? Рассмотрите три возможных случая: а) данные углы острые; б) данные углы прямые; в) данные углы тупые. Проверьте обратные утверждения.

Задачи к п. 13.1

13.4. В тетраэдре $PABC$ углы во всех гранях при вершине B прямые. Нарисуйте проекцию: а) PA на (ABC); б) PC на (ABC); в) $\triangle PAC$ на (ABC); г) AC на (PAB); д) PC на (PAB); е) $\triangle PAC$ на (PAB); ж) $\triangle PAC$ на (PBC); з) $\triangle PAB$ на (PBC); и) $\triangle ABC$ на (PAB).

13.5. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте проекцию на плоскость каждой его грани: а) AA_1; б) CD_1; в) B_1D; г) сечения BB_1D_1D; д) $\triangle AB_1D_1$; е) $\triangle BA_1C_1$.

13.6. Нарисуйте правильный тетраэдр $PABC$. 1) Нарисуйте проекцию: а) PA на (ABC); б) PA на (PBC); в) AC на (PAB); г) $\triangle PAC$ на (ABC). 2)* Пусть точка X движется по ребру PB от P к B. Как будет изменяться площадь проекции треугольника AXC на (ABC)?

13.7. Пусть $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида. Нарисуйте проекцию: а) PA на (ABC); б) PA на (PBD); в) AD на (PAC); г) $\triangle PBC$ на (ABC); д) $\triangle PAB$ на (PBD); е) $\triangle PBD$ на (PAC).

13.8. Пусть треугольник ABC равнобедренный и его основание AC лежит в плоскости α. Пусть треугольник AB_1C — проекция треугольника ABC на α, а BD — высота треугольника ABC. а) Докажите, что B_1D — высота треугольника AB_1C. б) Пусть $BD : B_1D = 2 : 1$. Чему равно отношение площадей треугольников ABC и AB_1C? в) Пусть отношение площадей треугольников ABC и AB_1C равно k. Чему равно отношение этих высот? г) Пусть площадь треугольника ABC равна S. В каких границах лежит площадь треугольника AB_1C?

13.9. Прямая a перпендикулярна плоскости α. Нарисуйте проекцию α на плоскость, проходящую через a.

13.10. а) Плоскости α и β перпендикулярны. Нарисуйте проекцию α и β на плоскость γ, перпендикулярную и к α, и к β. б) Плоскости α и β пересекаются. Нарисуйте их проекцию на плоскость γ, перпендикулярную и к α, и к β.

13.11. На рисунке 120 изображены проекции некоторой фигуры на три взаимно перпендикулярные плоскости. Нарисуйте эту фигуру.

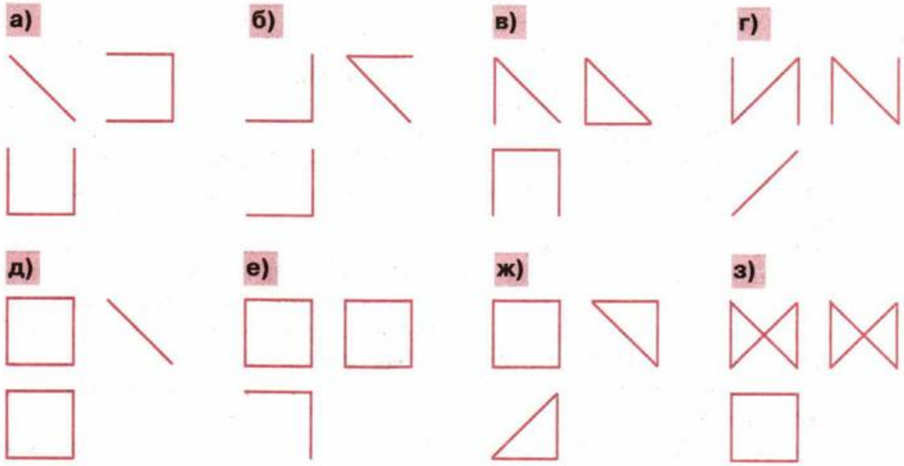


Рис. 120

Задачи к п. 13.2

13.12. а) Пусть известны диагональ прямоугольного параллелепипеда и два его измерения. Как вычислить его третье измерение? б) Пусть диагональ куба равна d. Чему равняется его ребро?

13.13. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой p. Из точки $A \in \alpha$ опущен перпендикуляр AA_1 на прямую p. Из точки $B \in \beta$ опущен перпендикуляр BB_1 на прямую p. Докажите, что $AB^2 = AA^2_1 + A_1B^2_1 + B_1B^2$.

13.14. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Вычислите расстояние: а) A_1K, где точка K — середина ребра CD; б) KL, где точка L — середина ребра C_1B_1; в) LM, где точка M — центр грани BB_1A_1A.

13.15. Прикладная геометрия | От верхнего конца столба тянут провод к стене дома. Какие данные нужны, чтобы вычислить длину провода?

13.16. Исследуем | В пирамиде $PABCD$ основание $ABCD$ — квадрат. Ребро PB перпендикулярно плоскости основания. Объясните, почему $(DA) \perp (AP)$ и $(DC) \perp (CP)$. Какая из этих «перпендикулярностей» останется, если $ABCD$ будет прямоугольником; ромбом?

13.17. Из точки Q плоскости α проведён отрезок $QP \perp \alpha$. Отрезок AB лежит в плоскости α, и точка K — его середина. Объясните, почему $AB \perp PK$, если точка Q: а) вершина равнобедренного треугольника QAB; б) центр равностороннего треугольника ABC; в) центр окружности, на которой лежат точки A и B.

13.18. Нарисуйте плоскость α и в ней отрезок AB. Проведите через точку A прямую $a \perp AB$, лежащую в плоскости α, а через точку B прямую $b \perp \alpha$. а) Точку A соедините отрезком с любой точкой X прямой b. Докажите, что $AX \perp a$. б) На прямой b возьмите точку C и нарисуйте перпендикуляр из точки C на a. в) Нарисуйте прямую, проходящую через A перпендикулярно a, но не перпендикулярную плоскости α. Будет ли она пересекать прямую b?

13.19. Нарисуйте две пересекающиеся плоскости α и β. Пусть p — прямая их пересечения. Нарисуйте точку O, не лежащую в этих плоскостях, и перпендикуляры OA и OB из точки O на плоскости α и β. а) Нарисуйте перпендикуляр OC из точки O на прямую p. Докажите, что (AB) и (OC) лежат в одной плоскости. б) Нарисуйте перпендикуляры из точек A и B на прямую p. Совпали ли их основания на прямой p? Должны ли совпадать?

13.20. Дан прямоугольный треугольник ABC. а) Пусть точка K — середина гипотенузы AB, отрезок KL перпендикулярен (ABC). Нарисуйте перпендикуляры из точки K на (AC) и (BC). Как вычислить их длины, если известны стороны треугольника ABC и KL? В каком случае они равны? б) Пусть $|AC| = |BC| = |KL| = 1$, точка K находится на гипотенузе AB и $AK = x$. Чему равны перпендикуляры из L на AC и BC? В каких границах находятся их длины?

13.21. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка K движется по диагонали A_1C куба от A_1 к C. Пусть $A_1K = x$. Выразите через x расстояния от K до: а) вершин куба; б) рёбер куба; в) граней куба.

13.22. Исследуем | а) Боковые грани треугольной пирамиды $PABC$ равнонаклонены к плоскости её основания ABC. Верно ли, что вершина P пирамиды проектируется на плоскость её основания в центр окружности, вписанной в треугольник ABC? б) Обобщите результат пункта «а» на n-угольные пирамиды, у которых боковые грани равнонаклонены к плоскости основания.

13.23. Исследуем | Основание четырёхугольной пирамиды $PABCD$ — ромб $ABCD$, а её боковые грани равнонаклонены к плоскости основания. а) Верно ли, что вершина P проектируется на плоскость основания в точку пересечения диагоналей основания? б) Найдите высоту и боковые рёбра пирамиды, если ромб $ABCD$ имеет сторону 2, угол $60°$, а боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом $45°$.

13.24. В основании четырёхугольной пирамиды лежит параллелограмм, а её боковые грани равнонаклонены к плоскости основания. Докажите, что основание пирамиды — ромб.

13.25. Докажите, что боковые грани правильной пирамиды равнонаклонены к плоскости её основания.

13.26. В основании четырёхугольной пирамиды лежит квадрат, а её боковые грани равнонаклонены к плоскости основания. Докажите, что пирамида правильная.

Задачи к п. 13.3

13.27. В каких границах находится $|B\alpha|$, если: а) $|A\alpha|=2$, а точка B такова, что $|AB|=1$; б) $|A\alpha|=1$, а $|AB|=2$?

13.28. Пусть известны $|A\alpha|$, $|B\alpha|$ и угол между прямой AB и её проекцией на плоскость α. Как найти $|AB|$? А как найти длину проекции отрезка AB на α?

13.29. а) Пусть AB — наклонная к плоскости α, $A \in \alpha$, $|B\alpha|=d$. Чему равно расстояние от середины AB до α? б) Пусть $|A\alpha|=d_1$, $|B\alpha|=d_2$, точка C — середина AB. Чему равно $|C\alpha|$? в) Точка C — середина AB, $|A\alpha|=d_1$, $|C\alpha|=d_2$. Чему равно $|B\alpha|$? (Точки A и B могут лежать с одной стороны от α и с разных сторон от неё. Рассмотрите оба случая.)

13.30. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1, точка K — середина ребра C_1D_1, точка F — центр грани BB_1C_1C. Вычислите расстояние:

а) $|A_1(CDD_1)|$; б) $|A_1(BB_1D_1)|$; в) $|A_1(AD_1C_1)|$;
г) $|K(A_1B_1B)|$; д) $|K(AA_1C_1)|$; е) $|K(A_1B_1C)|$;
ж) $|F(AA_1D_1)|$; з) $|F(ABB_1)|$;
и) $|F(BB_1D_1)|$; к) $|F(ACC_1)|$.

13.31. Дан правильный тетраэдр $PABC$ с ребром 2. Точка K лежит на ребре PB, и $|PK|=x$. Выразите через x расстояния: а) $|KC|$; б) $|K(BC)|$; в) $|K(AC)|$; г) $|K(ABC)|$; д) $|K(APC)|$. В каких границах лежат эти расстояния? Могут ли быть равны расстояния от K до (BC) и до (AC)? от K до (ABC) и до (APC)?

Задачи к п. 13.4

13.32. Сторона основания правильной четырёхугольной (треугольной) пирамиды равна a, а её боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. а) Найдите площадь её боковой грани. б)* Сформулируйте и решите аналогичную задачу для правильной n-угольной пирамиды.

13.33. Площадь боковой грани правильной четырёхугольной (треугольной) пирамиды равна S, а её боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. а) Найдите площадь основания пирамиды и его сторону. б)* Сформулируйте и решите аналогичную задачу для правильной n-угольной пирамиды.

13.34. Рёбра PA, PB и PC тетраэдра $PABC$ попарно взаимно перпендикулярны. Такой **тетраэдр** назовём **ортогональным**. Треугольник ABC считаем основанием ортогонального тетраэдра. Пусть $PA=a$, $PB=b$, $PC=c$.
а) Найдите тангенсы углов наклона боковых граней ортогонального тетраэдра к плоскости его основания.
б) Докажите, что $S^2(ABC)=S^2(PAB)+S^2(PBC)+S^2(PAC)$, где S — площадь.

§ 14 Расстояние между фигурами и параллельность

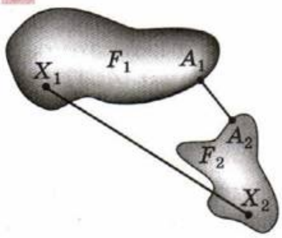
14.1 **Расстояние между фигурами.** Мы уже определили расстояние от точки до фигуры. Но часто надо решить более общую задачу — найти расстояние между двумя фигурами. Например, как определить расстояние между Англией и Францией, чтобы построить туннель под Ла-Маншем? Ясно, что надо искать ближайшие точки этих фигур, иначе говоря, искать кратчайший среди всех отрезков, соединяющих точки этих фигур. Представление о нём даёт вытянутая рука, когда вы с трудом достаёте некоторый предмет.

Точки A_1 и A_2 фигур F_1 и F_2 называются их **ближайшими точками**, если для любых точек $X_1 \in F_1$ и $X_2 \in F_2$ выполняется неравенство $A_1A_2 \leqslant X_1X_2$ (рис. 121, *а*). **Расстоянием между двумя фигурами** называется расстояние между ближайшими точками этих фигур (если такие точки есть). Расстояние от точки до фигуры является частным случаем расстояния между фигурами, когда одна фигура — точка. Расстояние между фигурами будем обозначать $|F_1F_2|$, где F_1 и F_2 — данные фигуры.

На рисунке 121, *б* приведены примеры ближайших точек A и B фигур, лежащих в одной плоскости, — двух параллельных прямых, прямой и круга, двух кругов.

Может быть, что ближайших точек у фигур нет. Например, если F_1 — центр круга, а F_2 — фигура, состоящая из точек, лежащих вне этого круга. Тогда расстояние между фигурами определяется иначе. Но мы такие случаи не рассматриваем.

а)



б)

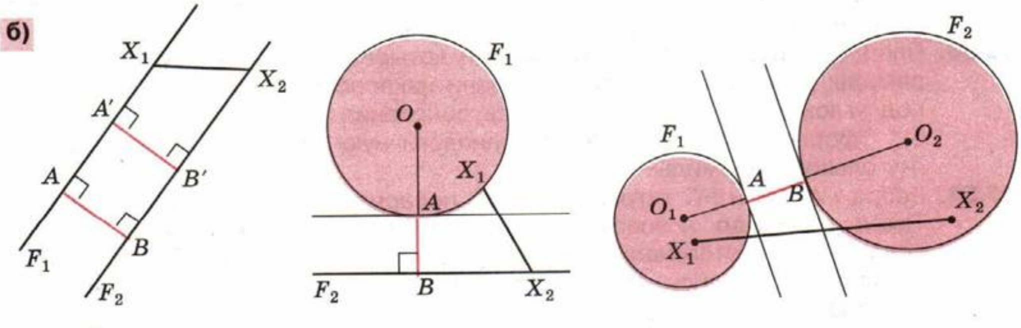


Рис. 121

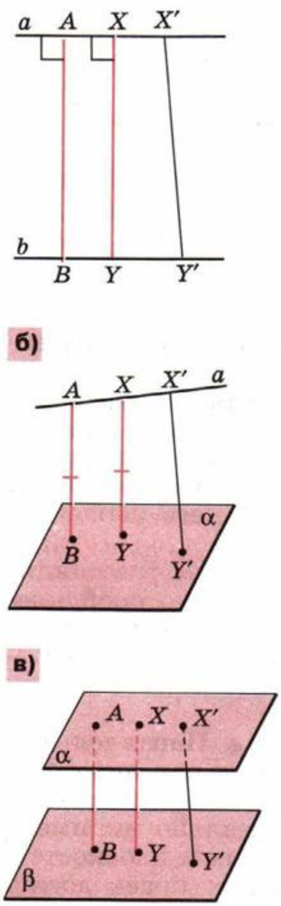


Рис. 122

14.2 Расстояние между прямыми и плоскостями.

Решим задачу о расстоянии между двумя фигурами для простейших случаев, когда эти фигуры — прямые или плоскости, не имеющие общих точек.

Мы покажем, что во всех возможных случаях расстояния между этими фигурами равны длинам их общих перпендикуляров.

Рассмотрим последовательно эти случаи.

1. *Параллельные прямые* a *и* b. Из любой точки $A \in a$ проведём общий перпендикуляр этих прямых AB (рис. 122, *а*). Он является кратчайшим отрезком, соединяющим точки этих прямых.

В самом деле, если точки $X \in a$ и $Y \in b$ таковы, что XY — другой общий перпендикуляр этих прямых, то $XY = AB$. А если XY не является общим перпендикуляром этих прямых, то $XY > AB$.

Итак, $|ab|$ — это длина общего перпендикуляра прямых a и b.

2. *Параллельные прямая* a *и плоскость* α (рис. 122, *б*). Доказательство такое же, как в случае 1, и оно вас не затруднит.

3. *Параллельные плоскости* α *и* β (рис. 122, *в*). Доказательство этого случая также несложное. Сделайте его самостоятельно.

Примером расстояния между параллельными плоскостями может служить высота призмы. Основания призмы лежат в параллельных плоскостях, а сама она — между этими плоскостями. Высотой призмы называется перпендикуляр, проведённый из любой точки одного основания призмы на плоскость другого основания, а также его длина. Поэтому можно сказать, что **высота призмы** — это расстояние между плоскостями её оснований. Высота потолка в комнате — это расстояние между полом и потолком, а потому и высота призмы, т. е. комнаты.

4*. *Скрещивающиеся прямые* a *и* b (рис. 123, *а* на с. 100). Они лежат в параллельных плоскостях α и β. Проекция a' прямой a на плоскость β пересекает прямую b в некоторой точке B. Точка B является проекцией на β некоторой точки $A \in \alpha$. Отрезок AB будет общим перпендикуляром плоскостей α и β, а потому и общим перпендикуляром прямых a и b. Возьмём теперь любой другой отрезок XY, где $X \in a$, $Y \in b$. Так как XY не является общим перпендикуляром плоскостей α и β, то $AB < XY$. Поэтому расстояние между

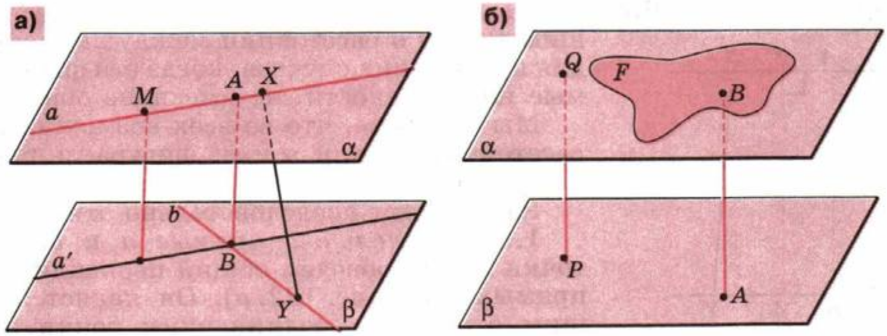


Рис. 123

скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Чтобы вычислить это расстояние, необязательно строить общий перпендикуляр прямых a и b. Можно из любой точки M прямой a опустить перпендикуляр на плоскость β и найти его длину. А можно найти длину любого общего перпендикуляра плоскостей α и β.

Так же поступаем, когда находим расстояние от любой фигуры F, лежащей в некоторой плоскости α, до параллельной ей плоскости β (рис. 123, *б*). Высота здания с плоской крышей — пример такого расстояния.

14.3 **Расстояние и параллельность.** ▲ Параллельные прямые и плоскости определяются как прямые и плоскости, которые не пересекаются (на всём их бесконечном протяжении). Но реально мы имеем дело с конечными частями прямых и плоскостей. Параллельность противоположных краёв доски, так же как параллельность междуэтажных перекрытий, определяется не тем, что получается при их бесконечном продолжении. Никакой плотник не продолжает краёв доски до бесконечности, как и строители даже мысленно не продолжают междуэтажные перекрытия. На самом деле в параллельных прямых и плоскостях важны и имеют реальный смысл те их свойства, которые относятся к их конечным частям. На основании этих же свойств производится построение параллельных прямых и плоскостей, а в действительности — их конечных частей.

Важнейшим среди таких свойств, характеризующих параллельность прямых и плоскостей, является постоянство расстояния, т. е. равно-

Рис. 124

удалённость точек одной прямой или плоскости от другой. Как вы установили самостоятельно в п. 14.2, все общие перпендикуляры двух параллельных плоскостей равны. Выполняется также и обратное утверждение: концы равных перпендикуляров к данной плоскости, расположенные с одной стороны от неё, лежат в одной плоскости, параллельной данной, и заполняют её.

Реальным воплощением отрезков, о которых идёт речь, могут представляться столбы и колонны, стоящие на основании здания и подпирающие параллельное ему перекрытие. На колонны равной высоты опирается верхняя плоскость здания, например греческого храма. И в современном строительстве укладывают междуэтажные перекрытия на вертикальных столбах равной высоты. Их верхние концы оказываются в плоскости, параллельной той, где лежат их основания (рис. 124). ▼

Вопросы для самоконтроля

1 Как найти расстояние между двумя фигурами?

2 Как найти расстояние между: а) двумя параллельными плоскостями; б) прямой и параллельной ей плоскостью?

3 Что такое высота призмы?

4 Как проверить на практике параллельность: а) прямой и плоскости; б) двух плоскостей?

5 При рассмотрении случая 4 п. 14.2 некоторые утверждения не доказаны. Какие? Как их доказать?

Задачи

14.1. Дополняем теорию | Зная, что общие перпендикуляры двух параллельных плоскостей равны, докажите более общее утверждение: параллельные отрезки с концами на параллельных плоскостях равны. Проверьте обратное утверждение.

14.2. Дополняем теорию | Даны две параллельные плоскости. Какую фигуру образуют все точки, равноудалённые от этих плоскостей?

14.3. Дополняем теорию | Отрезок соединяет центры оснований правильной призмы. Докажите, что он: а) является её высотой; б) равноудалён от всех боковых граней призмы.

Задачи к п. 14.2

14.4. Пусть $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$. а) $|A\beta| = 1$. Найдите $|B\alpha|$. б) В каких границах лежит $|\alpha\beta|$, если $AB = 1$?

14.5. Пусть $\alpha \parallel \beta$. а) Пусть известны $|A\alpha|$ и $|A\beta|$. Как вычислить $|\alpha\beta|$? б) Пусть известны $|A\alpha|$ и $|\alpha\beta|$. Как вычислить $|A\beta|$?

14.6. Пусть $\alpha \parallel \beta$ и $\beta \parallel \gamma$. Как вычислить $|\alpha\gamma|$, зная $|\alpha\beta|$ и $|\beta\gamma|$?

14.7. Докажите, что высота прямой призмы равна её боковому ребру.

14.8. а) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 1 и составляет с двумя рёбрами основания углы 60° и 45°. Чему равна его высота? б)* К какому выводу вы придёте, если замените угол 60° на 30°?

14.9. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в вершине A сходятся три ромба со стороной 2 и острым углом при вершине A, равным 60°. Нарисуйте и вычислите высоту параллелепипеда.

14.10. Основание треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник со стороной 2, $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60°$. Нарисуйте и вычислите высоту призмы, если $|AA_1|$ равно: а) 1; б) 2; в) 3.

14.11. Пусть $a \parallel \alpha$, $A \in a$. а) $|A\alpha| = 1$. Найдите $|a\alpha|$. б) $|a\alpha| = d$. Найдите $|A\alpha|$.

14.12. Пусть $a \parallel \alpha$, $|Xa| = 1$. В каких границах лежит $|X\alpha|$, если $|a\alpha|$ равно: а) 1; б) 2; в) 0,5?

14.13. а) Прямые a и b перпендикулярны плоскости α и пересекают её в точках A и B. Докажите, что $|ab| = |AB|$. б) Как вы будете искать расстояние между двумя вертикальными столбами?

14.14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $|AB| = 1$, $|AD| = 2$, $|AA_1| = 3$. Вычислите расстояние между: а) прямой AB и плоскостью CDD_1; б) прямой C_1B и плоскостью AA_1D_1; в)* прямой BD и плоскостью AB_1D_1.

14.15. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с рёбрами $|AC| = 1$ и $|AA_1| = 2$. Найдите расстояния от прямой: а) AB до плоскости $A_1B_1C_1$; б) CC_1 до плоскости AA_1B_1; в) проходящей через центры оснований до боковых граней.

14.16. Через две параллельные прямые a и b проходят две параллельные плоскости α и β. В каких границах лежит $|\alpha\beta|$, если $|ab| = 1$?

14.17*. Через две параллельные прямые a и b проходят две перпендикулярные плоскости α и β, пересекающиеся по прямой p. В каких границах находится расстояние от прямой p до плоскости, проходящей через прямые a и b, если $|ab| = 1$?

14.18*. а) Прямая a перпендикулярна плоскости α и пересекает её в точке A. Прямая b лежит в плоскости α и скрещивается с прямой a. Докажите, что $|ab| = |Ab|$. б) Даны две прямые a и b. Точка X — переменная точка прямой a. Как меняется $|Xb|$ при движении точки X в одном направлении?

14.19*. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояния между прямыми: а) AD и BB_1; б) B_1D_1 и AC; в) CD_1 и AD; г) CD_1 и A_1D; д) B_1D и AC.

Задачи к п. 14.3

14.20. Какую фигуру образуют точки X, удовлетворяющие условию: а) $|X\alpha| = d$; б) $|X\alpha| \leqslant d$; в) $|X\alpha| \geqslant d$; г) $d_1 \leqslant |X\alpha| \leqslant d_2$?

14.21. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Нарисуйте его сечение плоскостью, удалённой на 1 от плоскости: а) AA_1D_1; б) AA_1C_1; в)* A_1BD_1.
Нарисуйте его сечение плоскостью, равноудалённой от плоскостей: г) AA_1B_1 и CDD_1; д)* AD_1C и BA_1C_1.

14.22. Даны две параллельные плоскости. Какую фигуру образуют точки, лежащие ближе к первой из них, чем ко второй?

14.23. Прикладная геометрия | Почему стол на четырёх ножках не всегда устойчив?

14.24. В прямоугольном параллелепипеде провели сечение, плоскость которого равноудалена от двух его параллельных граней. Докажите, что в этой плоскости лежат: а) середины четырёх его рёбер; б) середины диагоналей.

§ 15 Углы

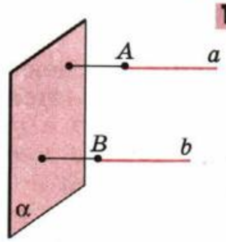


Рис. 125

15.1 Сонаправленность лучей. Два луча a и b называются **сонаправленными**, если они перпендикулярны некоторой плоскости α и лежат с одной стороны от неё (рис. 125).

Для сонаправленных лучей a и b употребляется обозначение: $a \uparrow\uparrow b$.

Из данного определения и теоремы о параллельности перпендикуляров следует, что возможны два случая расположения сонаправленных лучей:

1) два сонаправленных луча лежат на одной прямой, и тогда один из них содержит другой (рис. 126, *а*);

2) два сонаправленных луча лежат на параллельных прямых, и тогда они лежат с одной стороны от прямой, проходящей через их начала (рис. 126, *б*).

Основной признак сонаправленности лучей даёт следующая лемма:

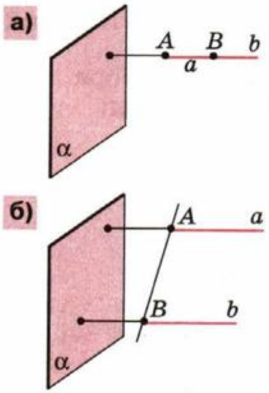


Рис. 126

Лемма *(о сонаправленности лучей).* **Два луча, сонаправленные с третьим лучом, сонаправлены.**

Доказательство. Пусть лучи a и b сонаправлены с лучом c. Докажем, что a и b сонаправлены. Так как $a \uparrow\uparrow c$, то они перпендикулярны некоторой плоскости α и лежат с одной стороны от неё. Аналогично b и c перпендикулярны некоторой плоскости β и лежат с одной стороны от β. Так как α и β перпендикулярны одной прямой, на которой лежит луч c, то $\alpha \parallel \beta$ (рис. 127).

Пусть плоскость α удалена от начала луча c дальше, чем плоскость β. Тогда все лучи a, b, c лежат с одной стороны от плоскости α и все перпендикулярны ей (по теоремам из пп. 8.1 и 8.2.). Поэтому лучи a и b сонаправлены. ■

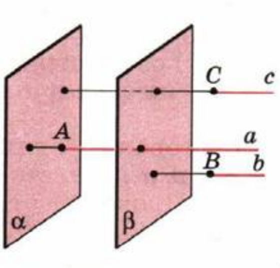


Рис. 127

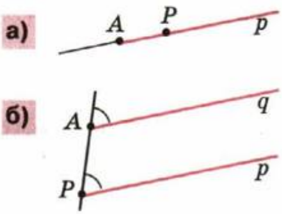


Рис. 128

Если даны луч p и точка A, то из точки A можно провести единственный луч q, сонаправленный с лучом p.

Строя этот луч, надо рассмотреть два случая: 1) точка A и луч p лежат на одной прямой; 2) они не лежат на одной прямой. В первом случае один из лучей p или q содержит другой (рис. 128, *а*). Во втором случае лучи p и q лежат на параллельных прямых с одной стороны от прямой, проходящей через их начала (рис. 128, *б*).

15.2 Угол между лучами. Угол между сонаправленными лучами полагается равным 0°.

Если лучи p и q не сонаправлены и имеют общее начало, то угол между ними определяется как величина плоского угла со сторонами p и q.

Наконец, в общем случае, когда лучи p и q не сонаправлены и имеют различные начала, поступают так: из любой точки O проводят лучи p' и q', сонаправленные соответственно с лучами p и q (рис. 129). **Углом между p и q** называется величина угла между p' и q'.

Угол между лучами p и q обозначается так: $\angle(pq)$.

Угол между p и q не зависит от выбора точки O. Это вытекает из следующей леммы:

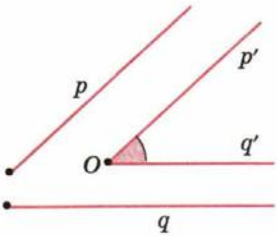
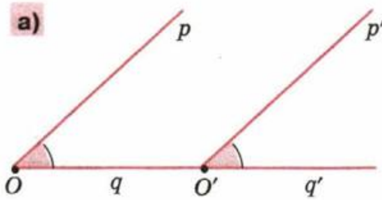


Рис. 129

Лемма *(об углах с сонаправленными сторонами).* **Углы, стороны которых соответственно сонаправлены, равны.**

Доказательство. Пусть даны два угла с вершинами в точках O и O' и соответственно сонаправленными сторонами: $p \uparrow\uparrow p'$ и $q \uparrow\uparrow q'$. В частном случае, когда у этих углов есть стороны, лежащие на одной прямой, утверждение леммы вытекает из равенства соответственных углов при параллельных прямых, пересечённых третьей прямой (рис. 130, *а*). Поэтому рассмотрим общий случай, когда стороны углов не лежат на одной прямой.

Отложим на сонаправленных сторонах этих углов равные отрезки: $OA = O'A'$ на p и p', а также $OB = O'B'$ на q и q' (рис. 130, *б*). Проведём отрезки OO', AA', BB', AB и $A'B'$. Так как $OA = O'A'$ и $OA \parallel O'A'$, то четырёхугольник $OAA'O'$ — параллелограмм. Поэтому $AA' = OO'$, $AA' \parallel OO'$. Ана-



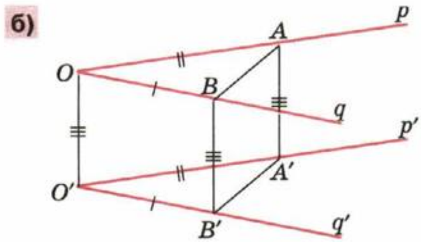


Рис. 130

логично $OO' = BB'$, $OO' \parallel BB'$. Поэтому $AA' = BB'$, $AA' \parallel BB'$, т. е. четырёхугольник $AA'B'B$ — параллелограмм. Следовательно, $AB = A'B'$.

Итак, в треугольниках OAB и $O'A'B'$ соответственные стороны равны. Но тогда в них равны и соответственные углы. Итак, $\angle AOB = \angle A'O'B'$, т. е. $\angle(pq) = \angle(p'q')$. ■

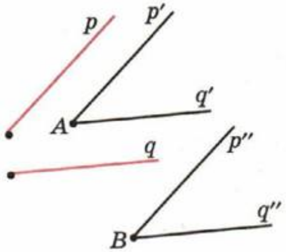


Рис. 131

Пусть теперь даны два луча p и q. Из точек A и B проведём сонаправленные с ними лучи p', q' и p'', q'' (рис. 131). По лемме о сонаправленности лучей (п. 15.1) $p' \parallel p''$ и $q' \parallel q''$. А тогда по лемме об углах с сонаправленными сторонами, доказанной в этом пункте, $\angle(p'q') = \angle(p''q'')$, как и говорилось при определении угла между p и q.

15.3 **Угол между прямыми.** Если прямые пересекаются, то угол между ними, как известно из планиметрии, равен величине вертикальных не тупых углов, образованных этими же прямыми.

Если же прямые скрещиваются, то угол между ними определяют так: через любую точку проводят прямые, параллельные данным, и находят угол между этими прямыми.

В частности, мы можем теперь говорить о взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых и отрезках, если угол между ними равен 90° (отрезки взаимно перпендикулярны, если они лежат на взаимно перпендикулярных прямых).

При таком расширении понятия перпендикулярности прямых, лучей и отрезков остаются справедливыми доказанные ранее теоремы, в которых перпендикулярность рассматривалась лишь для пересекающихся прямых, лучей и отрезков: признак перпендикулярности прямой и плоскости (п. 7.1) и теорема о трёх перпендикулярах (п. 13.2).

Убедитесь в этом!

В дальнейшем мы будем применять эти теоремы именно в этом более широком смысле. Так, например, *прямая a перпендикулярна плоскости α, если она перпендикулярна любым двум пересекающимся прямым, лежащим на этой плоскости*. Эти прямые прямую a могут и не пересекать.

15.4 **Угол между прямой и плоскостью.** Мы уже подробно изучили два важнейших случая взаимного расположения прямой и плоскости: перпендикулярность и параллельность. Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости. Поэтому естественно считать, что угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90°. Если же прямая параллельна плоскости или лежит в ней, то угол между ними считается равным 0°.

Рассмотрим общий случай, когда прямая a пересекает плоскость α, но не перпендикулярна ей (рис. 132), т. е. случай прямой, наклонной к плоскости. Характеризуя взаимное расположение таких прямых, часто указывают, насколько прямая отклонилась от перпендикуляра к плоскости. Например, в оптике говорят про угол падения луча света на плоскую поверхность, т. е. про угол между прямой и перпендикуляром (нормалью) к данной плоскости (рис. 132, *а*). Но в геометрии, оценивая наклон прямой к плоскости, рассматривают не этот угол, а угол, дополняющий его до 90°, т. е. показывающий, насколько прямая отклонилась от плоскости.

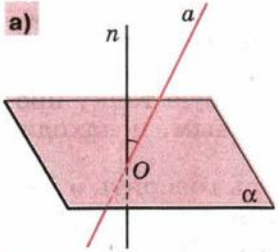
Углом между плоскостью и наклонной к ней прямой называется угол φ между этой прямой и её проекцией на данную плоскость (рис. 132, *б*).

Ясно, почему это определение исключает случай, когда прямая перпендикулярна плоскости: проекцией такой прямой на плоскость будет точка.

Угол между прямой a и плоскостью α обозначается так: $\angle a\alpha$.

Угол между прямой и плоскостью обладает следующим минимальным свойством: он является наименьшим среди всех углов, образованных данной прямой с прямыми на плоскости. Докажите это свойство сами.

а)



б)

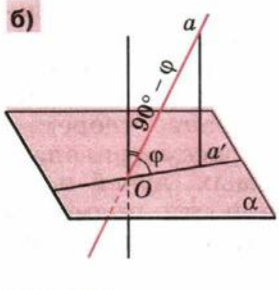


Рис. 132

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется угол между: а) лучами; б) прямыми?
2. В каких теоремах может быть использована перпендикулярность скрещивающихся прямых? Сформулируйте их.
3. Как вычислить угол между прямой и плоскостью?
4. Какой угол образуют между собой: а) перпендикулярные прямая и плоскость; б) параллельные прямая и плоскость?

Задачи

15.1. Дополняем теорию | а) Прямая a перпендикулярна плоскости α, прямая b лежит в плоскости α. Докажите, что $a \perp b$. б) Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b перпендикулярна ей. Докажите, что $a \perp b$. в) Сформулируйте и проверьте утверждение, обратное б).

15.2. Дополняем теорию | Прямая a, лежащая в плоскости α, перпендикулярна прямой b, наклонной к этой плоскости. Докажите, что a перпендикулярна проекции прямой b на плоскость α. Докажите обратное. Объясните, почему это утверждение является обобщением теоремы о трёх перпендикулярах.

15.3. Дополняем теорию | Даны две плоскости. К каждой из них проводится перпендикулярная ей прямая. Докажите, что угол между этими прямыми не зависит от выбора прямых и равен углу между плоскостями.

Задачи к пп. 15.2, 15.3

15.4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите угол φ, который луч AD образует с лучами: а) CC_1; б) A_1B_1; в) B_1C; г) BC_1; д) CD_1; е) A_1B; ж) AC_1; з) D_1B; и) CA_1; к) DB_1.

15.5. Прямая перпендикулярна двум сторонам треугольника. Объясните, почему она будет перпендикулярна третьей его стороне. Обобщите это утверждение.

15.6. а) Равнобедренный треугольник ABC вращают вокруг основания AB. Точки K и L — два положения его вершины C. Докажите, что $(AB) \perp (KL)$. Можно ли обобщить это утверждение для неравнобедренных треугольников? б) Докажите, что скрещивающиеся рёбра правильного тетраэдра перпендикулярны. в) Верно ли это для правильной треугольной пирамиды?

15.7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите перпендикулярность прямых: а) AC и B_1D_1; б) B_1D и AB; в) CD_1 и AC_1; г) Чему равен угол между прямыми A_1D и D_1C?

15.8. а) Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой p. Точка $A \in \alpha$, точка $B \in \beta$. Проекции этих точек на прямую p совпадают. Докажите, что $(AB) \perp p$.

б) Проверьте утверждение, обратное данному в случае а).

в)* Верно ли такое утверждение: $(AB) \perp p$ тогда и только тогда, когда существует плоскость, содержащая (AB) и перпендикулярная прямой p?

Задачи к п. 15.4

15.9. Из точки A провели к плоскости α перпендикуляр AB и наклонную AC. Их длины известны. Как вычислить угол между прямой AC и плоскостью α?

15.10. Прямая b лежит в плоскости α, а прямая a пересекает α в некоторой точке O прямой b (рис. 133, *а*). Пусть прямая a — наклонная к плоскости α и прямая a_1 — проекция a на α. Обозначим соответственно через φ, φ_1, φ_2 углы между прямыми a и b, a и a_1, a_1 и b. Докажите, что

$$\cos\varphi = \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2. \qquad (1)$$

Решение. Рассмотрим случай, когда $\varphi \neq 90°$. Построим прямоугольные треугольники с углами φ, φ_1, φ_2. Для этого спроектируем любую точку $A \in a$ ($A \neq O$) на плоскость α в точку $A_1 \in a_1$, а затем спроектируем точку A_1 на прямую b в точку B (рис. 133, *б*). По теореме о трёх перпендикулярах точка B — проекция точки A на прямую b. Выполняются равенства:

$$\cos\varphi = \frac{OB}{OA} \text{ (из треугольника } OAB\text{)},$$
$$\cos\varphi_1 = \frac{OA_1}{OA} \text{ (из треугольника } OAA_1\text{)},$$
$$\cos\varphi_2 = \frac{OB}{OA_1} \text{ (из треугольника } OA_1B\text{)}.$$

Перемножая второе и третье из этих равенств, получаем:

$$\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 = \frac{OA_1}{OA} \cdot \frac{OB}{OA_1} = \frac{OB}{OA} = \cos\varphi. \qquad (2)$$

Убедитесь, что равенство (2) верно и в случае, когда $\varphi = 90°$.

Формула (2) позволяет упростить решения многих задач (например, задачи 13.3). Она верна и для скрещивающихся прямых a и b (убедитесь в этом, рис. 133, *в*). Поэтому, пользуясь ею, можно находить углы между любыми прямыми. Так, для угла φ между диагоналями A_1D и D_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ получаем $\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

Поэтому $\varphi = 60°$ (рис. 133, *г*).

Особенно важно, что из формулы (2) можно найти угол φ_1, т. е. вычислить угол между прямой и плоскостью.

Наконец, формула (2) может быть применена для вычисления углов не только между прямыми, но и между лучами. Напомним, что угол между лучами может быть тупым, а угол между прямыми нет. Подумайте, как обосновать применимость этой формулы для вычисления угла между лучами.

15.11. Прямая a пересекает плоскость α. На a взят отрезок длины d. Проекцией его на α является отрезок длины d_1. Чему равен угол между a и α? Составьте для этой ситуации другие задачи.

15.12. а) На прямой, наклонной к плоскости α, взяли два отрезка и спроектировали их на α. Докажите, что отношение проекций равно отношению самих отрезков. б) Составьте задачу, аналогичную а), для отрезков, взятых на двух параллельных прямых.

15.13. а) Из точки A проводят к плоскости α равные наклонные. Докажите, что все они образуют с α одинаковые углы. б) Из точки A проводят к пло-

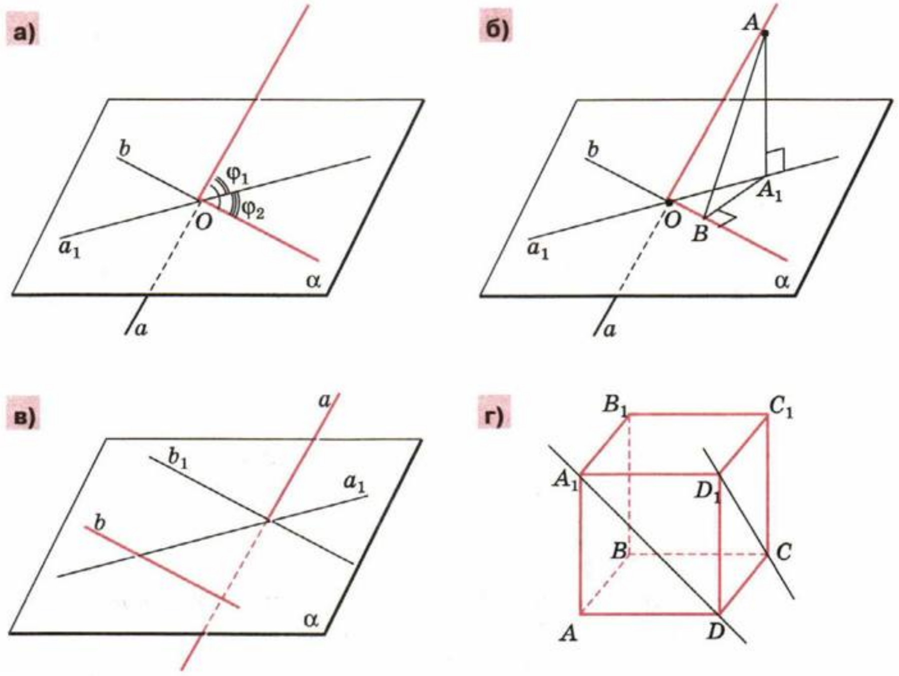


Рис. 133

скости α разные по длине наклонные. Докажите, что бóльшая из них образует с α меньший угол.

15.14. Прямая *a* перпендикулярна плоскости α, а прямая *b* — наклонная к α. Известен угол между *a* и *b*. Как найти угол между *b* и α?

15.15. Докажите, что параллельные прямые образуют с данной плоскостью равные углы. Верно ли обратное утверждение?

15.16. На рисунке 96 дан прямоугольный параллелепипед. Занумерованные углы запишите как углы между прямой и плоскостью.

15.17. а) На рисунке 134 на с. 110 изображена правильная пирамида *PABC*. Точки *K*, *L* — середины сторон основания. Точка *Q* — центр основания. Занумерованные углы запишите как углы между прямой и плоскостью. б) На рисунке 135 на с. 110 изображена правильная пирамида *PABCD*. Точки K_1, K_2, K_3, *K* — середины сторон основания, точка *Q* — центр основания. Занумерованные углы запишите как углы между прямой и плоскостью.

15.18. Два квадрата *ABCD* и *ABKL* лежат в перпендикулярных плоскостях. Вычислите угол φ, который образует с плоскостью квадрата *ABKL*: а) (*DL*); б) (*DK*); в) (*MN*), где *M* — середина *DC*, а *N* — середина *KL*.

15.19. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. 1) Вычислите углы, которые образует с гранями куба прямая: а) DC_1; б) DB_1. 2) Вычислите угол φ, который образует с плоскостью AB_1C_1 прямая: а) A_1D; б) A_1C. 3) Вычислите угол φ, который образует с плоскостью BDC_1 прямая: а) A_1D; б) B_1D.

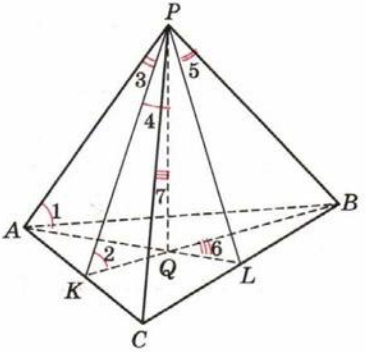


Рис. 134

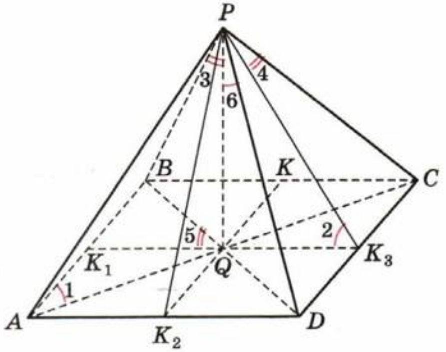


Рис. 135

15.20. В правильной n-угольной пирамиде ($n=3$; 4) высота равна стороне основания. Вычислите угол φ, который составляет с плоскостью основания: а) боковое ребро; б) апофема, т. е. высота боковой грани, проведённая из вершины пирамиды.

15.21. Прикладная геометрия | Из наблюдательного пункта установили, что расстояние до самолёта увеличивается, а угол, под которым он виден над горизонтом, уменьшается. Взлетает этот самолёт или снижается? Решите задачу, если расстояние увеличилось в 1,5 раза, а угол над горизонтом уменьшается с 60° до 45°; с 60° до 30°. Решите задачу в общем виде.

15.22. Прикладная геометрия | В течение солнечного дня вы наблюдаете за тенью от дерева. Как изменяется её длина?

Задачи к главе II

II.1. Дан квадрат $ABCD$. Точка X — переменная точка перпендикуляра к его плоскости, проведённого из точки B. Пусть сторона квадрата равна d. а) Найдите $|XA|$, $|XC|$, $|XD|$, если $|XB|=h$. б) Найдите $|XD|$, если $|XA|=1$. в) Какая сторона квадрата видна из точки X под бóльшим углом? А какая диагональ? г) Докажите, что $(XAB)\perp(XBC)$, $(XAC)\perp(XBD)$. д) Будут ли перпендикулярны плоскости XAD и XCD? е) Как вычислить длину перпендикуляра из точки B на плоскость AXC, если $|XB|=h$?

II.2. Треугольник ABC равнобедренный с основанием BC. Через вершину A проведена прямая, перпендикулярная его плоскости. Точка X — переменная точка этой прямой. Сравните углы BXC и BAC. Как изменяется угол BXC при удалении точки X от A? Может ли он быть прямым? Как вычислить угол BXC, если известны стороны треугольника ABC и длина перпендикуляра из точки X на плоскость ABC?

II.3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина BB_1, точка L — середина CC_1, точка M — середина A_1B_1, точка C — середина BN. Нарисуйте перпендикуляр из: а) A на (BB_1D_1); б) A_1 на (AB_1D_1); в) D_1 на (AB_1C); г) K на (CDD_1); д) L на (BDB_1); е) M на (AB_1D_1); ж) N на (BDB_1); з) N на (DA_1B_1); и) N на (A_1C_1B). Вычислите его длину, если ребро куба равно 1.

II.4. а) Даны два параллелограмма ABB_1A_1 и ACC_1A_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. б) Через вершины треугольника ABC провели параллельные прямые, пересекающие его плоскость. С одной стороны от его плоскости на этих прямых отложили равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. в) Обобщите утверждение б).

II.5. а) Точка A лежит в плоскости α. На этой плоскости взяли прямую a, не проходящую через A, и провели к ней перпендикуляр AB. Через точку B к прямой a провели другую перпендикулярную ей прямую BC. Из точки A в плоскости ABC провели $(AD) \perp (AB)$. Докажите, что $(AD) \perp \alpha$. б) Составьте задачу, аналогичную задаче, рассмотренной в случае а), если A не лежит в α.

II.6. Из точки O — центра квадрата $ABCD$ провели перпендикуляр OO_1 на плоскость α. Через вершины квадрата провели отрезки, параллельные OO_1, до плоскости α. а) Докажите, что если три из них равны, то все четыре равны. б) Будет ли это верно, если равны два из них? в) Пусть известны сторона квадрата, длина OO_1 и длины двух из проведённых отрезков. Можете ли вы найти длины остальных? г) Пусть известны стороны квадрата и длина OO_1. В каких границах лежит длина наибольшего из проведённых отрезков? наименьшего из них?

II.7. Плоскости α_1 и α_2 параллельны, плоскости β_1 и β_2 параллельны, плоскости α_1 и β_1 пересекаются по прямой a, плоскости α_2 и β_2 пересекаются по прямой b. Как расположены прямые a и b?

II.8. Докажите, что две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда параллельны перпендикулярные к ним прямые.

II.9. Пусть прямая b параллельна прямой a и плоскости α. Как могут быть расположены прямая a и плоскость α?

II.10. Прямые a и b скрещиваются. Постройте плоскость: а) проходящую через a и параллельную b; б) параллельную каждой из них; в) параллельную a и пересекающую b. г) Постройте две плоскости, проходящие через одну из прямых и параллельные другой. Как они расположены между собой? Единственна ли такая пара плоскостей?

II.11. В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром 1 точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра PA.

1) Вычислите длину перпендикуляра из: а) K на (ABC); б) K на (PBC); в) Q на (PAC); г) Q на (BCK).

2) Нарисуйте два сечения этого тетраэдра, проходящие через точки K и Q и параллельные плоскости BCP. Во сколько раз площадь одного из них больше площади другого?

3) Нарисуйте сечение этого тетраэдра, проходящее через точку Q и параллельное рёбрам BC и PA. Чему равны его периметр и площадь?

4) Нарисуйте сечение этого тетраэдра, проходящее через точку K и параллельное BC. Какое из них имеет наибольшую площадь?

5) Нарисуйте сечение тетраэдра, проходящее через точку K и перпендикулярное плоскости PBC. Какую оно имеет форму?

II.12. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ с ребром 1 точка Q — центр основания, а точка K — середина PC.

1) Вычислите длину перпендикуляра: а) из K на (ABC); б) из K на (PBD); в) из Q на (PCD).

2) Вычислите площадь сечения пирамиды, проходящего через точку K параллельно: а) (ABC); б) (PBD); в) (PAD).

3) Нарисуйте сечение пирамиды, проходящее через K и параллельное прямым: а) PQ и AB; б) PD и AC. Как вычислить его площадь?

4) Нарисуйте сечение пирамиды, проходящее через: а) K и параллельное (BD); б) Q и параллельное (CD).

5) Нарисуйте сечение пирамиды, проходящее через: а) K и перпендикулярное (ABC); б) PQ и перпендикулярное (PAD); в) K и перпендикулярное (PBD).

II.13. Одна из диагоналей куба с ребром 1 лежит в плоскости α. В каких границах находятся длины проекций его рёбер и других диагоналей при проектировании на плоскость α?

II.14. Параллелограмм лежит с одной стороны от плоскости α. Расстояния от трёх его вершин до плоскости α известны. Как вычислить расстояние до α от его четвёртой вершины? Как решить задачу, если параллелограмм будет лежать с разных сторон от α?

II.15. На некоторой высоте над землёй произошёл взрыв. Его видели и слышали три человека, которые установили, на какой высоте он произошёл. Как они это сделали? Смогли бы с этой задачей справиться два человека?

II.16. На плоскости α лежит угол, равный φ. Точка A не лежит в плоскости α. Известны расстояния от неё до вершины угла и до его сторон. Как найти расстояние от A до α?

II.17. Две вершины параллелограмма лежат в плоскости α. Докажите, что две другие его вершины удалены от плоскости α на одинаковое расстояние. Составьте похожую задачу для других многоугольников.

II.18. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ построены с одной стороны от его плоскости два равных треугольника AKB и CLD, плоскости которых перпендикулярны (ABC). Как расположены между собой (KL) и (ABC)?

II.19. Дан реальный тетраэдр. Как вычислить угол между его боковым ребром и основанием, если измерения можно проводить только на его поверхности? При этом желательно обойтись наименьшим числом измерений.

II.20. Отрезок AB имеет длину 1 и упирается концами в две перпендикулярные плоскости α и β, причём $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $\angle(AB)\alpha = \varphi_1$, $\angle(AB)\beta = \varphi_2$. а) Найдите длину проекций отрезка AB на каждую из плоскостей α и β, а также на прямую их пересечения p. б) Найдите угол $\varphi = \angle(AB)p$.

II.21. В правильной треугольной пирамиде угол при вершине в боковой грани равен φ. Выразите через него двугранный угол: а) φ_1 при основании; б) φ_2 при боковом ребре.

II.22. Прямая лежит внутри двугранного угла величиной φ и параллельна его граням. Известны расстояния от неё до каждой из граней. Можете ли вы найти расстояние от этой прямой до ребра двугранного угла?

II.23. Плоскости α и β пересекаются по прямой p, $\angle\alpha\beta = \varphi$. Точка $A \in \alpha$. а) Как, зная $|Ap|$ и φ, вычислить $|A\alpha|$? б) Составьте другие задачи для этой же ситуации. в)* Пусть теперь $B \in \beta$. Докажите, что равенство $|A\beta| = |B\alpha|$ равносильно равенству $|Ap| = |Bp|$.

II.24. В правильной треугольной пирамиде угол между боковой гранью и плоскостью основания равен φ. Сторона основания равна 1. Найдите расстояние от: а) вершины пирамиды до основания; б) вершины основания до противоположной боковой грани.

II.25. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с ребром 1 через сторону BC проводится сечение под углом φ к основанию. а) Вычислите площадь сечения при $\varphi = 30°$, $45°$, $60°$. б) Выразите площадь сечения как функцию от φ.

II.26. Докажите, что угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям.

Биссектором двугранного угла называется полуплоскость, ограниченная его ребром, которая делит данный двугранный угол на два равных по величине двугранных угла.

II.27. Докажите, что биссектор двугранного угла есть множество точек угла, равноудалённых от его граней.

II.28. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1. Переменная плоскость перпендикулярна отрезку, соединяющему середины K и M его противоположных рёбер. Пусть расстояние от неё до K равно x. Выразите как функцию от x площадь такого сечения. Какое из сечений тетраэдра этой плоскостью имеет наибольшую площадь? А наибольший периметр?

II.29. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ с ребром основания a и высотой h рассматриваются сечения плоскостью, параллельной плоскости PKL, где точка K — середина ребра AD, а точка L — середина ребра BC. Пусть x — расстояние от него до высоты пирамиды. Выразите как функцию от x площадь такого сечения. Какое из этих сечений имеет наибольшую площадь?

II.30. В правильной четырёхугольной пирамиде, у которой все рёбра равны 1, проводится сечение, перпендикулярное: а) диагонали основания; б) ребру основания; в) боковому ребру. Выберите сами независимую переменную x и выразите как функцию от этой переменной площадь такого сечения. Какое из этих сечений имеет наибольшую площадь? А периметр?

II.31. В основании четырёхугольной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат со стороной 1. Грань PAB перпендикулярна основанию и является равносторонним треугольником. В этой пирамиде проводится сечение, параллельное плоскости PCD. Пусть x — расстояние от него до грани PCD. Выразите как функцию от x площадь такого сечения. В каком положении это сечение имеет наибольшую площадь?

II.32. На диагоналях смежных граней куба с ребром 1, лежащих на скрещивающихся прямых, лежат концы отрезка, параллельного грани куба. Пусть x — расстояние от него до ближайшей параллельной грани. Выразите как функцию от x длину этого отрезка. Какой из таких отрезков является наибольшим? А наименьшим?

II.33. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Плоскость α перпендикулярна прямой A_1C_1, а плоскость β параллельна прямой CD_1. Чему равен угол между этими плоскостями? б) Найдите угол между плоскостями DA_1B_1 и AB_1C_1.

II.34. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все боковые грани — квадраты со стороной 1. Точка K — середина ребра AC, точка L — середина ребра AB, точка M — середина ребра BB_1, точка N — переменная точка ребра AA_1. Проводятся сечения призмы плоскостями KLM и BCN и рассматривается общий отрезок этих сечений. Пусть x — расстояние от этого отрезка до ближайшего основания призмы. Выразите как функцию от этой переменной длину этого отрезка. Какой из таких отрезков является наибольшим? А наименьшим?

II.35. Дана правильная треугольная призма, у которой все рёбра равны 1. Концы переменного отрезка лежат на двух скрещивающихся диагоналях её граней, а сам этот отрезок параллелен: а) плоскости основания призмы; б) плоскости третьей её боковой грани. Выберите независимую переменную x и выразите через x длину такого отрезка. В каком положении такой отрезок является наибольшим и наименьшим?

II.36. В правильной треугольной призме, у которой все рёбра равны 1, проводится сечение: а) через вершину основания и параллельно противоположной стороне этого основания; б) через ребро основания; в) перпендикулярное медиане одного из оснований; г) перпендикулярное диагонали одной из граней; д) перпендикулярное прямой, проходящей через одну из вершин и середину ребра, не лежащего с ней в одной грани. Выберите сами независимую переменную x и выразите как функцию от этой переменной площадь такого сечения. Можете ли вы установить, в каком положении достигает наибольшего значения площадь такого сечения? А периметр?

II.37. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, PQ — его высота. Точка X лежит на ребре PC, точка Y лежит на грани APC, точка Z лежит на ребре AB. Когда достигает граничных значений (наибольшего и наименьшего) угол, который составляет с прямой PQ прямая: а) AX; б) XZ; в) BY?

Итоги главы II

Три теоремы существования и единственности можно назвать основными в данной главе.

1) Через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и притом только одна (теорема 10 п. 9.1).

2) Через каждую точку проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна (теорема 11 п. 9.2).

3) Через каждую точку, не лежащую в данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной плоскости, и притом только одна (теорема 13 п. 11.3).

Следствием теоремы 11 является **признак параллельности плоскостей**: две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

Признаком параллельности прямых является теорема 8 (п. 8.1): две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

На предложения, обратные этим признакам параллельности, можно смотреть как на **признаки перпендикулярности прямой и плоскости**:

1) Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой (теорема 12 п. 11.2).
2) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости (теорема 9 п. 8.2).

Все эти теоремы дают возможность представлять себе пространство «расслоённым» на семейство параллельных плоскостей, перпендикулярных некоторой прямой (рис. 136, *а*), или «расслоённым» на семейство параллельных прямых, перпендикулярных некоторой плоскости (рис. 136, *б*).

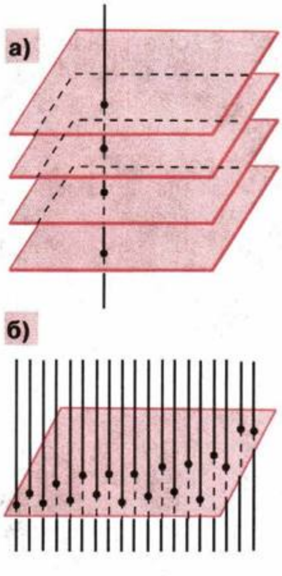
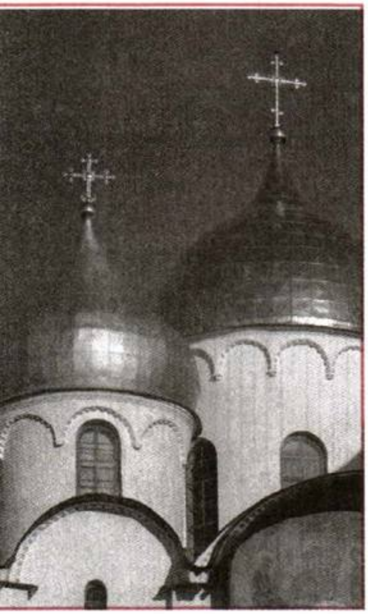


Рис. 136

Конечно, следует помнить следующие **четыре признака перпендикулярности (параллельности) прямой и плоскости**, а также **перпендикулярности (параллельности) плоскостей**.
1) Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, перпендикулярна этой плоскости (теорема 6 п. 7.1).
2) Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны (п. 10.3).
3) Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны (теорема 15 п. 12.2).
4) Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в данной плоскости, то она параллельна этой плоскости (теорема 14 п. 12.1).

Отметим ещё **теорему о трёх перпендикулярах** (п. 13.2): наклонная к плоскости перпендикулярна к прямой, лежащей в этой плоскости, тогда и только тогда, когда проекция наклонной перпендикулярна этой прямой, а также утверждение о равенстве углов с сонаправленными сторонами (п. 15.2).

В целом же содержание глав I и II можно назвать «Началами стереометрии», так как в этих главах речь шла в основном о прямых и плоскостях, а изучение более сложных пространственных фигур начнётся с главы III.



Глава III

ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Это последняя глава в курсе 10 класса простая по содержанию своей стереометрической части.

В главе рассказывается о шаре и сфере (§ 16 и 17), цилиндре и конусе (§ 18 и 19), окружности и круге (§ 20). Более сложные вопросы об измерении объёмов шара, цилиндра и конуса, а также об измерении их поверхностей рассматриваются в 11 классе в главе V.

§ 16 Сфера и шар

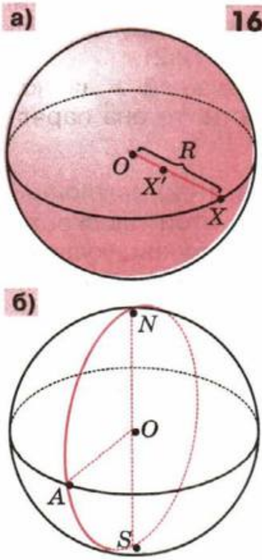


Рис. 137

16.1 **Определения сферы и шара.** Главу о пространственных (не плоских) фигурах мы начнём с изучения шара — одной из простейших, но очень богатой разнообразными и важными свойствами фигуры. О геометрических свойствах шара и его поверхности — сферы — написаны целые книги. Некоторые из этих свойств были известны ещё древнегреческим геометрам, а некоторые найдены совсем недавно. Эти свойства (вместе с законами естествознания) объясняют, почему, например, форму шара имеют небесные тела и икринки рыб, почему в форме шара делают батискафы и мячи, почему так распространены в технике шарикоподшипники и т. д. Мы можем доказать самые простые свойства шара. Доказательства других, хотя и очень важных, часто требуют применения совсем не элементарных методов, хотя формулировки таких свойств могут быть очень простыми: например, среди всех тел, имеющих данную площадь поверхности, наибольший объём у шара.

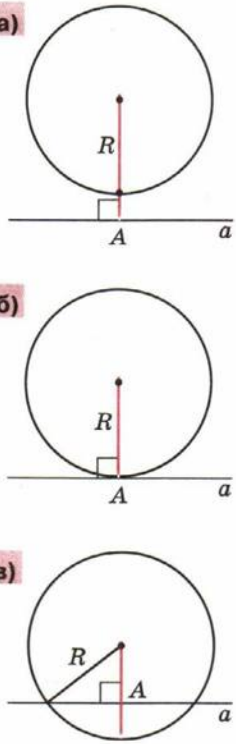


Рис. 138

Определяются сфера и шар в пространстве совершенно так же, как окружность и круг на плоскости.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки на одно и то же (положительное) расстояние. Эта точка называется **центром сферы**, а расстояние — её **радиусом.**

Итак, сфера с центром O и радиусом R — это фигура, образованная всеми точками X пространства, для которых $OX = R$ (рис. 137, *а*).

Шаром называется фигура, образованная всеми точками пространства, находящимися от данной точки на расстоянии, не большем данного (положительного) расстояния. Эта точка называется **центром шара**, а данное расстояние — его **радиусом.**

Итак, шар с центром O и радиусом R — это фигура, образованная всеми точками X пространства, для которых $OX \leqslant R$.

Те точки X шара с центром O и радиусом R, для которых $OX = R$, образуют сферу. Говорят, что эта *сфера ограничивает* данный *шар* или что она является его *поверхностью.*

О тех же точках X' шара, для которых $OX' < R$, говорят, что они лежат *внутри шара.*

Радиусом сферы (и шара) называют не только расстояние R, но и любой отрезок, соединяющий центр с точкой сферы.

Диаметром сферы (и **шара**) называют как величину, равную удвоенному радиусу, так и любой отрезок, по которому шар пересекает прямая, проходящая через его центр (рис. 137, *б*).

Точки сферы, являющиеся концами диаметра сферы, называются **диаметрально противоположными.**

16.2 **Взаимное расположение шара и плоскости.** Сначала вспомним, как могут быть расположены по отношению друг к другу круг и прямая (рис. 138). Три положения круга и прямой характеризуются расстоянием от центра круга до прямой. Круг и прямая могут не иметь общих точек, касаться в одной точке и пересекаться по отрезку.

Аналогично в пространстве для шара и плоскости возможны три случая:

1) *Если расстояние от центра шара до плоскости больше радиуса шара, то шар и плоскость не имеют общих точек* (рис. 139, *а*).

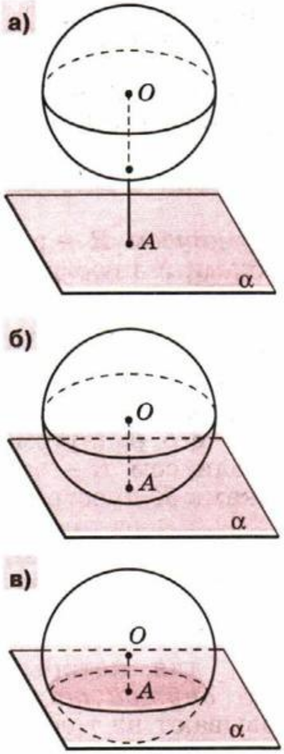


Рис. 139

2) *Если расстояние от центра шара до плоскости равно радиусу шара, то плоскость имеет с шаром и ограничивающей его сферой только одну общую точку (рис. 139, б).*

3) *Если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса шара, то пересечение шара с плоскостью представляет собой круг. Центр этого круга является проекцией центра шара на данную плоскость. Пересечение плоскости со сферой является окружностью указанного круга* (рис. 139, *в*).

Докажем эти утверждения. Пусть точка O — центр шара, R — его радиус, точка A — проекция точки O на данную плоскость α, так что $|O\alpha| = OA$.

1. $|O\alpha| = OA > R$ (см. рис. 139, *а*). Тогда для любой точки X плоскости α выполняется неравенство

$$OX \geqslant OA > R.$$

Из этого следует, что на плоскости α нет точек шара.

2. $|O\alpha| = OA = R$ (см. рис. 139, *б*). Так как $OA = R$, то точка A принадлежит шару. Возьмём любую точку $X \in \alpha$, отличную от A. Для неё $OX > OA$, а так как $OA = R$, то $OX > R$. Следовательно, любая точка X, отличная от точки A, не принадлежит шару. Итак, в этом случае шар и плоскость α имеют единственную общую точку — точку A.

3. $|O\alpha| = OA < R$ (см. рис. 139, *в*). Докажем, что пересечение шара и плоскости α — круг K в плоскости α с центром в точке A и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, где $d = OA$. Для этого про точку X плоскости α докажем два утверждения:

1) *если точка X лежит в шаре, то она лежит в круге K;*

2) обратно, *если точка X лежит в круге K, то она лежит в шаре.*

Отметим, что для любой точки $X \in \alpha$ выполняется равенство

$$OX^2 = OA^2 + AX^2 = d^2 + AX^2. \qquad (1)$$

Докажем первое утверждение. Пусть точка X плоскости α лежит в шаре. Тогда $OX \leqslant R$, а значит, $OX^2 \leqslant R^2$. Поэтому, учитывая (1), получаем

$$AX^2 + d^2 \leqslant R^2.$$

Отсюда следует, что

$$AX^2 \leqslant R^2 - d^2,$$

т. е. $AX \leqslant r$. Это и означает, что точка $X \in K$.

Докажем второе утверждение. Пусть точка X плоскости α лежит в круге K. Тогда

$$AX \leqslant r = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Поэтому $AX^2 + d^2 \leqslant R^2$, т. е. $OX^2 \leqslant R^2$. Это означает, что $OX \leqslant R$, т. е. точка X лежит в шаре. ■

Рассуждения о пересечении сферы с плоскостью проводятся аналогично, только вместо неравенств появляются равенства. Убедитесь в этом самостоятельно.

Результат, доказанный в случае 3, сформулируем как теорему.

Теорема 17 *(о пересечении шара с плоскостью).* **Если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса шара, то пересечение шара с плоскостью представляет собой круг.**

16.3 Касательная плоскость сферы.

Рассмотрим подробнее случай из предыдущего пункта, когда плоскость и сфера имеют единственную общую точку. В этом случае говорят, что **плоскость и сфера касаются**, а их общая точка называется **точкой касания**.

Признак касания сферы и плоскости: *если плоскость проходит через точку на сфере и перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то она касается сферы.*

Докажем свойство касательной плоскости, которое обратно этому признаку. А именно *если плоскость касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.*

Доказательство. Допустим, что плоскость не перпендикулярна радиусу. Тогда она удалена от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса. Но тогда согласно случаю 3 п. 16.2 плоскость пересекает сферу по окружности, что противоречит условию. Итак, плоскость перпендикулярна радиусу. ■

Объединим эти два утверждения в теорему *о касании сферы и плоскости*:

Теорема 18. Плоскость и сфера касаются в некоторой точке тогда и только тогда, когда плоскость перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку.

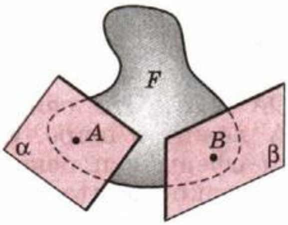


Рис. 140

Плоскость, касающаяся сферы, называется **касательной плоскостью** этой сферы. Отметим, что сфера имеет общую точку с такой плоскостью и лежит по одну сторону от неё, т. е. в одном полупространстве.

Плоскости, обладающие таким свойством относительно некоторой фигуры (необязательно сферы), называются **опорными плоскостями** этой фигуры (рис. 140).

16.4 Свойства сферы. Изображение сферы.

▲ Пусть S — сфера с центром O радиусом R, α — некоторая плоскость и $|O\alpha| = d < R$.

Плоскость α пересекает сферу S по окружности радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Радиус r будет наибольшим, когда $d = 0$, т. е. когда плоскость α проходит через центр сферы S. Тогда $r = R$. Поэтому окружность, по которой сфера пересекается с плоскостью, проходящей через её центр, называется **большой окружностью сферы.** *Каждые две большие окружности одной сферы пересекаются в двух диаметрально противоположных точках* (докажите это самостоятельно, рис. 141).

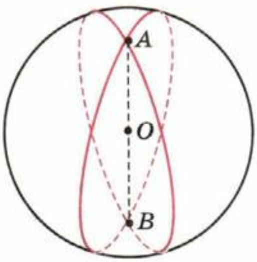


Рис. 141

А *через любые две недиаметрально противоположные точки сферы проходит единственная большая окружность*; она получается при пересечении сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы и две данные точки (рис. 142).

Ортогональная проекция шара, как и сферы, есть круг того же радиуса.

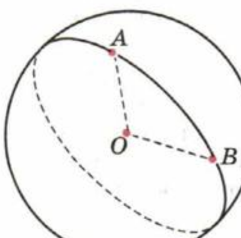


Рис. 142

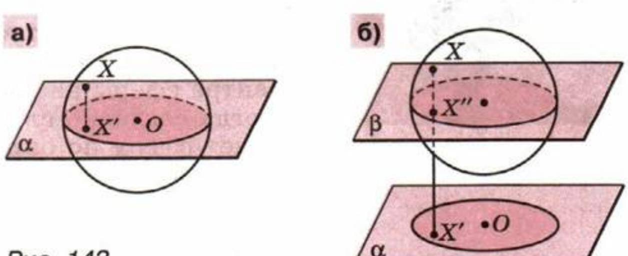
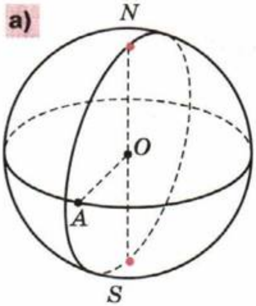


Рис. 143



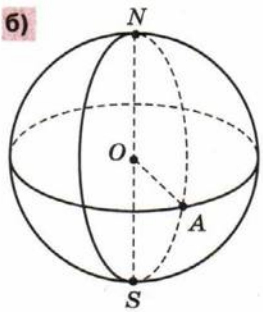


Рис. 144

Действительно, если плоскость проекции проходит через центр шара, то проекцией этого шара на плоскость является большой круг, по которому плоскость пересекает шар (рис. 143, *а*). Если же плоскость проекции не проходит через центр данного шара, то проекцией шара на эту плоскость будет круг, равный большому кругу (рис. 143, *б*).

Поэтому шар и сферу изображают в виде круга. При этом, чтобы отличить изображение шара от изображения круга, обычно в изображении шара рисуют проекцию какой-нибудь большой окружности. Проекция эта будет, как мы знаем, эллипсом (см. рис. 110, *а* на с. 88). Если взятая большая окружность принята за экватор, то полюсы изображаются, как на рисунке 144, *а*. На рисунке же 144, *б* изображение неверное! При таком положении полюсов экватор изображался бы отрезком. Объясните почему. ▼

Сфера описана около многогранника, если она проходит через все его вершины. В этом случае говорят, что **многогранник вписан в сферу. Сфера вписана в многогранник**, если она касается всех его граней. В этом случае говорят, что **многогранник описан около сферы.**

Вопросы для самоконтроля

1. Что общего у сферы и окружности, у шара и круга? А какая между ними разница?
2. Какие вы знаете свойства сферы?
3. Что представляет собой пересечение шара и плоскости?

Задачи

16.1. Дополняем теорию | Две сферы имеют единственную общую точку. Установите зависимость между их радиусами и расстоянием между их центрами.

16.2. Дополняем теорию | В шаре с центром O провели сечение с центром O_1. Докажите, что прямая OO_1 перпендикулярна плоскости сечения.

16.3. Дополняем теорию | Какой фигурой является пересечение двух сфер?

Задачи к п. 16.1

16.4. Фиксирована некоторая точка O. Какая фигура состоит из всех точек X, таких, что: а) $|OX| \leqslant 2$; б) $|OX| \geqslant 1$; в) $1 \leqslant |OX| \leqslant 2$?

16.5. Дан шар радиуса 2. В нём проводится хорда (отрезок, соединяющий две точки сферы этого шара). а) Чему равна её длина, если хорда удалена от центра шара на 1? б) Чему равна длина хорды, если она видна из центра под углом 30°, 120°, φ? в) Пусть длина хорды равна d. На каком расстоянии от центра шара она находится? Под каким углом φ она видна из центра?

16.6. Докажите, что в одном и том же шаре: а) равные хорды равноудалены от центра (и обратно); б) чем больше хорда, тем ближе она к центру (и обратно); в) чем больше хорда, тем больше угол, под которым она видна из центра (и обратно).

16.7. а) Дан шар с центром O радиуса R. Найдите расстояние от точки A до этого шара, если $OA = d$. Изменится ли результат, если вместо шара взять сферу? б) Даны два шара с радиусами R_1 и R_2. Расстояние между их центрами равно d. Чему равно расстояние между шарами? Изменится ли результат, если вместо шаров взять сферы?

Задачи к п. 16.2

16.8. На сфере радиуса 2 провели сечение радиуса 1. а) На каком расстоянии от центра сферы проходит его плоскость? б) Какой угол φ составляет его плоскость с радиусом сферы, проведённым в точку сечения?

16.9. В шаре радиуса 2 провели сечение. Чему равен радиус сечения, если оно: а) удалено от центра на 1; б) плоскость его составляет угол 45° с радиусом, проведённым в точку сечения, лежащую на сфере?

16.10. Дан шар. Докажите, что в нём: а) равные сечения равноудалены от центра (и обратно); б) бóльшие сечения ближе к центру (и обратно). в) Выясните, какую фигуру образуют центры равных сечений шара.

16.11. Исследуем. На сфере некоторого шара даны две точки. Через них проводятся всевозможные сечения этого шара. Какое из них имеет наибольшую площадь? А наименьшую площадь?

16.12. Из точки A сферы радиуса R выходят диаметр AB и хорда AC длины d. а) Чему равно $|BC|$? б) Чему равен $\angle BAC$? в) Найдите расстояние от C до AB.

16.13. Из одной точки сферы выходят равные хорды. а) Докажите, что они образуют равные углы с диаметром, выходящим из той же точки. б) Проверьте обратное утверждение. в) Какую фигуру образуют другие концы всех таких хорд?

16.14. Из точки A вне шара проводятся прямые, имеющие с его сферой единственную общую точку (о таких прямых говорят, что они **касаются сферы**). а) Докажите, что равны отрезки этих прямых от точки A до точки касания. б) Какую линию на сфере образуют точки касания всех этих прямых?

16.15. Исследуем. а) Шар радиуса R укладывается в круглое отверстие радиуса r. На сколько он углубится в это отверстие? б) Решите аналогичную задачу, если шар радиуса R укладывается в щель с параллельными краями ширины d.

Задачи к п. 16.3

16.16. Шар с центром O радиуса R касается плоскости α в точке A. Точка X принадлежит плоскости α. а) Пусть известно $|OX|$. Как вычислить $|XA|$?

б) Пусть известно $|XA|$. Как вычислить $|OX|$? Как вычислить расстояние от точки X до шара?

16.17. Шар и его касательная плоскость проектируются на плоскость, проходящую через точку касания и центр шара. Как выглядит проекция? Сделайте рисунок.

16.18. Шар и две его касательные плоскости проектируются на плоскость, проходящую через точки касания и центр шара. Как выглядит проекция (для обоих возможных случаев)?

16.19. Две параллельные плоскости касаются шара радиуса R. Чему равно расстояние между ними?

16.20. Шар радиуса R касается граней двугранного угла. Найдите расстояние от центра шара до ребра двугранного угла, если его величина равна: а) $90°$; б) $60°$; в) φ. г) Составьте и решите задачу, обратную задаче в). д) Укажите способ измерения двугранного угла, ребро которого недоступно.

Задачи к п. 16.4

16.21. Исследуем | На сфере дана точка. Сколько можно провести через эту точку: а) произвольных окружностей, лежащих на сфере; б) больших окружностей данной сферы; в) окружностей данного радиуса, лежащих на сфере? Решите эти же задачи, если на сфере даны две точки; три точки.

16.22. Сколько общих точек могут иметь две произвольные окружности данной сферы? На сколько частей они могут разбивать сферу? А если на этой сфере расположить три окружности, то на сколько частей они разобьют сферу?

16.23. Прикладная геометрия | Найдите длину шестидесятой параллели Земли. Во сколько раз она длиннее такой же параллели на Луне?

16.24. Нарисуйте многогранник: а) около которого можно описать сферу; б) около которого нельзя описать сферу; в) в который можно вписать сферу; г) в который нельзя вписать сферу. Нарисуйте многогранник с двумя свойствами из этих четырёх.

§ 17 Симметрия сферы и шара

▲ Одно из самых важных свойств, которыми может обладать фигура, — это её симметричность. Само слово «симметрия» с греческого может быть переведено как «соразмерность». Симметричная фигура содержит в себе равные и однообразно расположенные части, что придаёт ей уравновешенность.

Не считая самого пространства, сфера и шар — самые симметричные фигуры. Мы будем говорить о симметрии сферы, но всё сказанное о ней распространяется на шар.

17.1 **Сфера — центрально-симметричная фигура.** О центральной симметрии говорилось в планиметрии. Всё сказанное там дословно повторяется в стереометрии. Напомним определения.

Точки X и X' называются симметричными относительно точки O, если O делит отрезок XX' пополам (рис. 145, *а*).

Точка O считается симметричной сама себе (относительно O).

Две фигуры называются симметричными относительно точки O, если они состоят из попарно симметричных точек (рис. 145, *б*).

Это значит, что для каждой точки одной фигуры симметричная ей (относительно O) точка лежит в другой фигуре.

В частности, фигура может быть симметрична сама себе относительно некоторой точки O. Это значит, что для каждой её точки X точка X', симметричная точке X относительно точки O, лежит в ней же. Точка O называется тогда **центром симметрии фигуры**, а фигура называется **центрально-симметричной** (рис. 145, *в*).

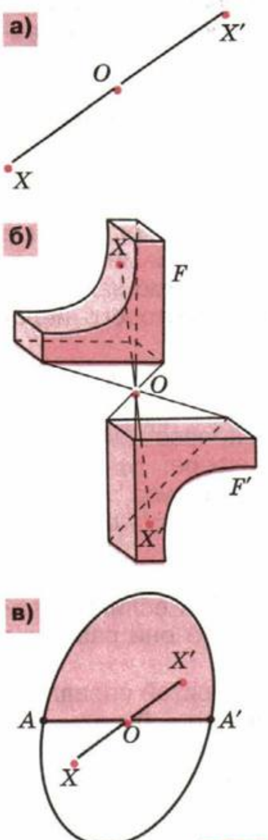


Рис. 145

Сфера симметрична относительно своего центра, т. е. центр сферы является её центром симметрии. В самом деле, для каждой точки X сферы с центром O симметричная ей (относительно O) точка лежит на сфере — этой точкой X' будет диаметрально противоположная точка (рис. 146).

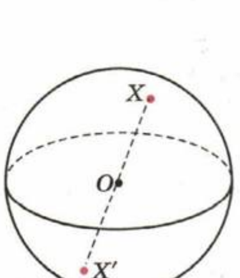


Рис. 146

17.2 **Сфера — зеркально-симметричная фигура.** Зеркальная симметрия в пространстве аналогична осевой симметрии на плоскости, но в определениях прямую надо заменить плоскостью.

Точки X и X' называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок XX' перпендикулярен α и делится ею пополам (рис. 147, *а*). Каждая точка плоскости α считается симметричной сама себе (относительно α).

Две фигуры называются симметричными относительно плоскости α (или зеркально-симметричными относительно α), если они состоят из попарно симметричных точек (рис. 147, *б*). Это значит, что для каждой точки одной фигуры симметричная ей (относительно α) точка лежит в другой фигуре.

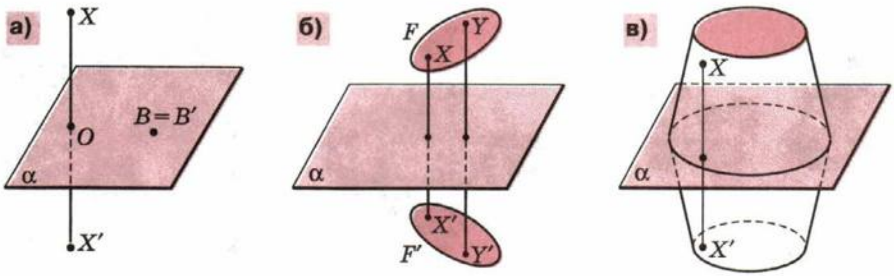


Рис. 147

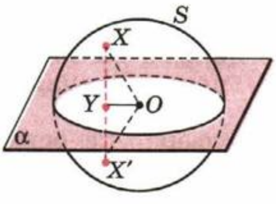


Рис. 148

Рис. 149

В частности, фигура может быть симметрична сама себе относительно некоторой плоскости α. Это значит, что для каждой её точки X точка X', симметричная X относительно α, лежит в ней же. Плоскость α называется тогда **плоскостью симметрии фигуры**, а фигура называется **зеркально-симметричной** (рис. 147, *в*).

Сфера симметрична относительно любой плоскости, проходящей через её центр (рис. 148). Это означает следующее.

Пусть S — некоторая сфера радиуса R с центром в точке O и α — любая плоскость, проходящая через O. Возьмём любую точку X сферы S, не лежащую в α. Построим симметричную ей относительно α точку X'. Для этого опустим из точки X перпендикуляр XY на плоскость α и продолжим его за точку Y на отрезок $YX' = XY$.

Прямоугольные треугольники OXY и $OX'Y$ равны (по двум катетам). Поэтому $OX' = OX = R$ и точка $X' \in S$.

Итак, α — плоскость симметрии сферы S.

Симметричные тела встречаются повсюду: здания, чайники, вазы, автомобили, дома, корабли, тела животных и т. д. (рис. 149).

17.3 Сфера — фигура вращения. Предметы, имеющие форму фигур вращения, постоянно встречаются в технике, искусстве, быту: тарелки, катушки, колёса, вазы и т. д. (рис. 150) — всё это реальные тела вращения.

Они характеризуются тем, что при вращении вокруг оси самосовмещаются, как точильные круги, валы турбин и т. п. При этом каждая точка такой фигуры, не лежащая на оси вращения,

Рис. 150

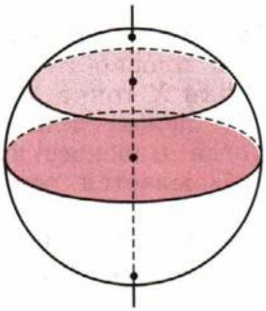


Рис. 151

движется по окружности с центром на оси. Поэтому такие фигуры как бы состоят из окружностей. Эти окружности имеют центры на одной прямой и лежат в плоскостях, перпендикулярных этой прямой.

Таким свойством обладает и сфера. Её осью вращения является любая прямая, проходящая через центр сферы (рис. 151).

И в общем случае фигуру вращения определим указанным свойством.

Пусть F — некоторая фигура в пространстве, a — некоторая прямая и X — любая точка фигуры F (рис. 152, a). Проведём через точку X плоскость α, перпендикулярную прямой a. В этой плоскости построим окружность с центром на прямой a, проходящую через точку X. Если фигура F содержит каждую такую окружность, то она называется **фигурой вращения с осью a**. Построенные окружности называются **параллелями фигуры вращения.**

Другим семейством плоских фигур, заполняющим фигуру вращения F, является семейство её меридианов.

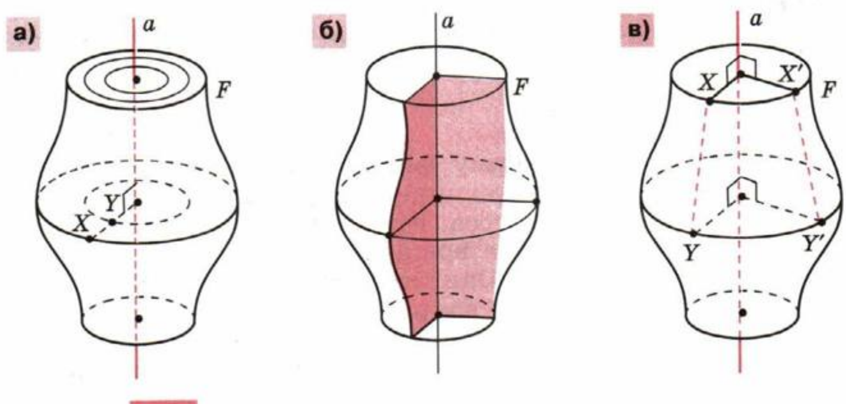


Рис. 152

Меридианы получаются в сечении фигуры F полуплоскостями, ограниченными осью фигуры F (рис. 152, *б*).

Все меридианы фигуры вращения F равны (рис. 152, *в*). Действительно, соответствующие друг другу точки этих фигур лежат на одной и той же параллели. Равенство расстояний для соответствующих пар точек следует из равенства прямоугольных трапеций.

Если представить себе, что полуплоскости, ограниченные осью вращения фигуры, поворачиваются вокруг оси, то все меридианы фигуры вращения будут совмещаться. Поэтому говорят, что фигура вращения получается в результате вращения плоской фигуры вокруг оси, лежащей в той же плоскости. Например, меридиан сферы — полуокружность, и сфера получается вращением полуокружности вокруг диаметра. А шар получается вращением полукруга вокруг диаметра. ▼

Вопросы для самоконтроля

1 Какая фигура называется центрально-симметричной?
2 Какая фигура называется зеркально-симметричной?
3 Какая фигура называется фигурой вращения?

Задачи

17.1. Как построить: а) прямую, центрально-симметричную данной; б) плоскость, центрально-симметричную данной; в) прямую, зеркально-симметричную данной; г) плоскость, зеркально-симметричную данной?

17.2. Нарисуйте шар. а) Нарисуйте шар, центрально-симметричный данному относительно середины радиуса. б) Нарисуйте шар, зеркально-симметричный данному относительно плоскости, проходящей через точку внутри данного шара.

17.3. Нарисуйте такие фигуры, которые имеют: а) центр симметрии; б) плоскость симметрии.

17.4. а) Нарисуйте сечение шара. Нарисуйте сечение, симметричное ему относительно центра шара.

б) Даны два равных и параллельных сечения шара. Докажите, что они центрально-симметричны.

в) Составьте задачи, аналогичные данным в случаях а) и б) для зеркальной симметрии.

§18 Цилиндр

18.1 **Определение и общие свойства цилиндра.** Слово «цилиндр» часто встречается в технике. Цилиндры обычно представляют себе круглыми, т. е. с круглым основанием (рис. 153, *а*). В общем же случае их можно определить так.

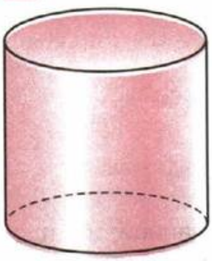
Пусть даны две параллельные плоскости α и α' и на плоскости α задана некоторая фигура F, не лежащая на одной прямой. Из всех точек фигуры F проведём параллельные друг другу отрезки до плоскости α'. Фигура, которую образуют эти отрезки, и называется **цилиндром** (рис. 153, *б*). Фигура F, из точек которой проводятся отрезки, называется **основанием цилиндра.** Отрезки, образующие цилиндр, так и называются его **образующими.**

Из данных определений вытекают такие свойства.

1. *Все образующие цилиндра равны друг другу* как параллельные отрезки между параллельными плоскостями (задача 14.1).

Концы образующих на плоскости α', параллельной плоскости α, образуют некоторую фигуру F'. Можно считать, что образующие выходят из неё. Поэтому и фигура F' может считаться основанием цилиндра. Если, как обычно принято, представлять плоскости оснований горизонтальными, то одно основание называют нижним, а другое — верхним.

а)



б)

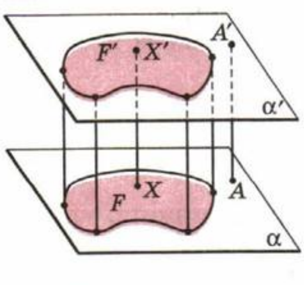
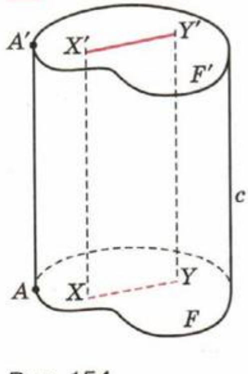


Рис. 153

а)



б)

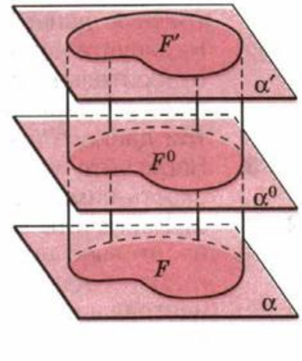


Рис. 154

2. *Основания цилиндра равны друг другу.*

Действительно, пусть F и F' — основания данного цилиндра. Каждой точке $X \in F$ соответствует точка X' — конец образующей, идущей из точки X. Если точкам X, Y основания F соответствуют точки X', Y' основания F', то отрезки XX' и YY' равны и параллельны (рис. 154, *а*). Стало быть, четырёхугольник $XX'Y'Y$ — параллелограмм. Поэтому отрезки XY и $X'Y'$ также равны и параллельны. Равенство отрезков XY и $X'Y'$ означает равенство фигур F и F'.

3. *Все сечения цилиндра плоскостями, параллельными плоскостям его оснований* (и лежащими между ними), *равны друг другу* (и равны основаниям цилиндра).

Действительно, каждое такое сечение является общим основанием двух цилиндров, на которые секущая плоскость разбивает данный цилиндр (рис. 154, *б*). Поэтому она равна другим основаниям этих цилиндров, которые являются основаниями исходного цилиндра.

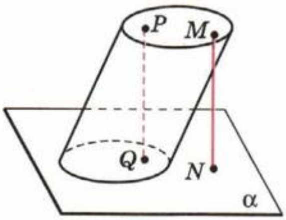


Рис. 155

Замечание. Можно сказать, что цилиндр получается при параллельном переносе основания вдоль образующих. Он получается также переносом образующей по основанию.

Переносим ли мы параллельно образующие по основанию или основание по образующим — получим один и тот же цилиндр.

Перпендикуляр, опущенный из любой точки плоскости одного основания цилиндра на плоскость другого его основания, называется **высотой цилиндра** (рис. 155). Длина такого перпендикуляра также называется высотой цилиндра. Так как плоскости оснований параллельны, то перпендикуляры у них общие и все равны. Поэтому высоту можно проводить из любой точки плоскости основания.

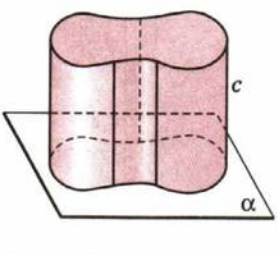


Рис. 156

Для того чтобы задать цилиндр, достаточно задать его основание и одну образующую. Соответственно цилиндры различаются по виду основания и наклону образующих.

Цилиндр называется **прямым**, если его образующие перпендикулярны плоскости основания (рис. 156). Для этого достаточно, чтобы какая-то образующая была перпендикулярна плоскости основания, так как остальные образующие параллельны ей и тоже будут перпендикулярны плоскости основания.

18.2 **Замечания об определении цилиндра*.** 1. Цилиндрами называются также фигуры, образуемые не только отрезками, но и параллельными прямыми. Мы такие цилиндры в школьном курсе не рассматриваем.

2. Цилиндру можно дать и другое определение. Пусть в плоскости α задана фигура F, не лежащая на прямой, и из всех её точек проходят в одну сторону (в одно полупространство) от плоскости α равные и параллельные отрезки. Образуемая ими фигура будет цилиндром с основанием F. Концы этих отрезков будут лежать на плоскости α', параллельной плоскости α (задача 14.1).

Итак, цилиндр можно определить как фигуру, образованную равными и параллельными отрезками; эти отрезки идут из всех точек плоской фигуры (здесь имеются в виду основания цилиндра) в одну сторону от её плоскости.

18.3 **Цилиндр вращения.** Рассмотрим прямой цилиндр, основание которого — круг (рис. 157, *а*), т. е. **прямой круговой цилиндр**. Отрезок, соединяющий центры его оснований, называется **осью цилиндра**. Покажем, что ось прямого кругового цилиндра является его осью вращения, а сам он — фигурой вращения.

Действительно, все сечения прямого кругового цилиндра плоскостями, параллельными плоскостям оснований, являются кругами с центрами на оси (по свойству 3 п. 18.1). Плоскости этих кругов перпендикулярны оси (рис. 157, *б*). Поэтому *прямой круговой цилиндр является фигурой*

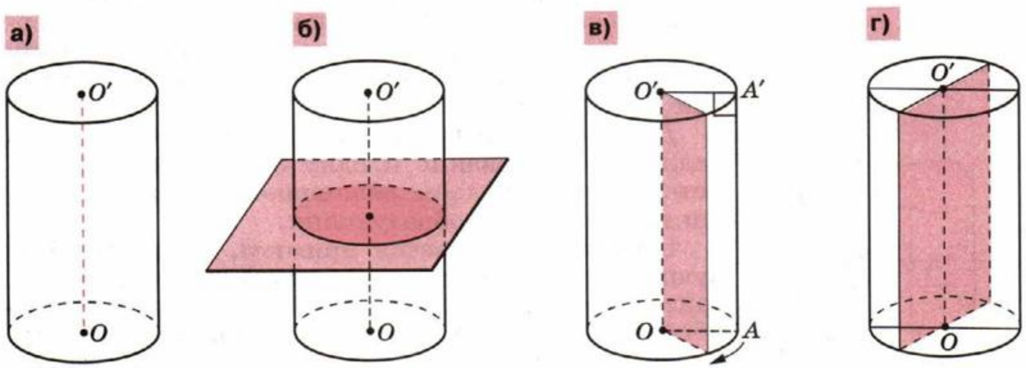
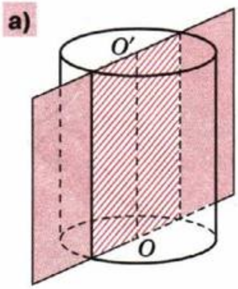
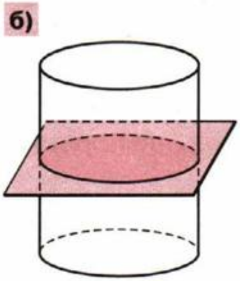


Рис. 157





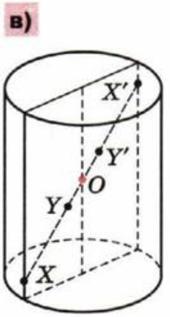


Рис. 158

вращения и его называют также **цилиндром вращения.** Он получается вращением прямоугольника вокруг его стороны (рис. 157, *в*), а также вращением прямоугольника вокруг своей оси симметрии. В последнем случае этот прямоугольник является **осевым сечением цилиндра вращения** (рис. 157, *г*).

Образующие цилиндра вращения, исходящие из точек окружности основания, образуют его **боковую поверхность.** Она сама является цилиндром, основанием которого служит окружность. Боковая поверхность тоже будет фигурой вращения.

Поверхностью цилиндра вращения называется объединение его оснований и боковой поверхности. (Напомним, что объединением данных фигур называется фигура, которой принадлежат все точки этих фигур, и никакие другие.)

Цилиндр вращения симметричен относительно любой плоскости, проходящей через его ось (рис. 158, *а*), *а также относительно плоскости, делящей пополам его образующие* (рис. 158, *б*). *Цилиндр вращения имеет центр симметрии — середину его оси* (рис. 158, *в*). Цилиндр вращения является объединением всех равных друг другу прямоугольников с общей осью симметрии — своих осевых сечений.

18.4 Цилиндры в практике.

▲ Предметы, имеющие более или менее точную форму цилиндра, а также такие, у которых есть цилиндрические части, встречаются повсеместно — в быту, в технике — и играют важнейшую роль. Оси автомобилей и вагонов, цилиндры и поршни двигателей, втулки и т. д. — все они имеют главные части в виде прямых круговых цилиндров. Стальные трубы представляют собой прямые цилиндры с тонким круговым кольцом в основании.

Под цилиндрами понимают обычно круглые предметы, но если иметь в виду цилиндры в нашем общем смысле, то имеется множество других примеров. Рельсы, различные виды проката, бетонные желоба и другие изделия имеют разнообразные формы цилиндров (хотя и не круглых, рис. 159, *а* на с. 132).

В быту как пример цилиндра приводят круглый стакан. Но это не совсем точно. Стакан имеет дно; если оно ровное, то можно считать, что

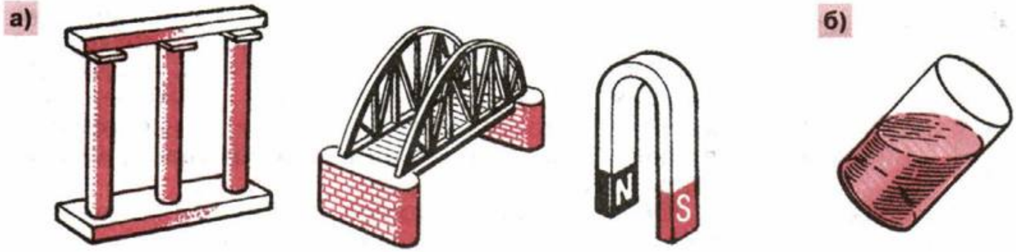


Рис. 159

стакан состоит из двух цилиндров: один представляет его стенки, другой — его дно. Чай в круглом стакане — пример кругового цилиндра. Заметим ещё, что плоское сечение боковой поверхности цилиндра вращения является эллипсом. Наклонив круглый стакан с водой, вы видите эллипс (рис. 159, *б*). ▼

Вопросы для самоконтроля

1. Какие вы знаете определения цилиндра?
2. Какие виды цилиндров вам известны?
3. Какие вы знаете свойства цилиндра? цилиндра вращения?

Задачи

В задачах слово «цилиндр» везде означает «цилиндр вращения».

18.1. Дополняем теорию | Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси?

18.2. Дополняем теорию | Докажите, что около цилиндра можно описать сферу. Это означает, что найдётся сфера, на которой лежат окружности двух оснований цилиндра. **Цилиндр** в таком случае называется **вписанным в сферу**, а **сфера — описанной около цилиндра**.

18.3. Дополняем теорию | Говорят, что **сфера вписана в цилиндр**, если она касается его оснований, а с боковой поверхностью цилиндра имеет общую окружность. Выясните, в какой цилиндр можно вписать сферу.

18.4. Какой фигурой является проекция цилиндра на плоскость: а) параллельную его оси; б) перпендикулярную его оси?

18.5. Осевое сечение цилиндра — квадрат (такой цилиндр называется **равносторонним**). 1) Сравните площадь осевого сечения с площадью: а) основания; б) квадрата, описанного около основания. 2) Во сколько раз площадь осевого сечения больше площади квадрата, вписанного в основание? 3) Объясните, почему сферу можно вписать только в такой цилиндр.

18.6. Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и составляет с плоскостью основания угол φ. Каковы размеры цилиндра (радиус его основания и высота)?

18.7. Исследуем | Два сечения цилиндра параллельны его оси и пересекаются. Как расположен их общий отрезок по отношению к плоскостям оснований?

18.8. Дан цилиндр с радиусом основания R и высотой H. Параллельно его оси проводится сечение цилиндра. Выразите его площадь и периметр как функции от x, где x — расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.

18.9. В сферу радиуса R вписан цилиндр. а) Нарисуйте осевое сечение этой фигуры. б) Чему равна диагональ его осевого сечения? в) Какой из таких цилиндров имеет наибольшую площадь осевого сечения?

18.10. Дан цилиндр радиуса R. Его кладут в щель шириной d так, что его ось параллельна краям щели. На сколько он углубится в эту щель?

18.11*. Две пересекающиеся плоскости, опорные к цилиндру радиуса R, проходят через образующие его поверхности. Чему равно расстояние от прямой пересечения этих плоскостей до оси цилиндра, если угол между этими плоскостями: а) 90°; б) φ?

18.12. Как плоским разрезом можно разбить цилиндр на две равные части?

§19 Конус

19.1 Определение и общие свойства конуса. Форму конуса (приближённо) имеют терриконы и вулканы, воронки и колбы (рис. 160), кульки и кучи песка. В геометрии же конус, как и цилиндр, определяют как фигуру, образованную отрезками.

Пусть даны плоская фигура F и некоторая точка P, не лежащая с фигурой F в одной плоскости. Отрезки, проведённые из точки P во все точки фигуры F, образуют фигуру, которую называют **конусом;** точка P называется **вершиной конуса,** фигура F — **основанием конуса** (рис. 161, *а*). Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками его основания, называются **образующими конуса. Высотой конуса** называется перпендикуляр из вершины конуса на плоскость его основания (рис. 161, *б*), а также длина этого перпендикуляра.

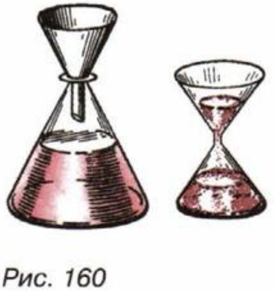


Рис. 160

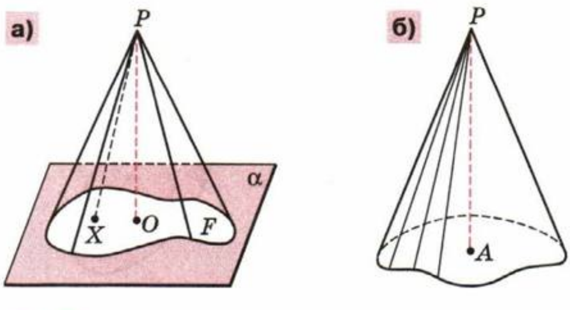


Рис. 161

Теорема 19 *(о сечении конуса).* **Если плоскость пересекает конус и параллельна его основанию, то сечение конуса такой плоскостью подобно основанию конуса.**

В стереометрии, как и в планиметрии, **фигура F' подобна фигуре F с коэффициентом $k > 0$,** если можно так сопоставить их точки, что $X'Y' = kXY$ для любых точек X, Y фигуры F и соответствующих им точек X', Y' фигуры F' (рис. 162, *а*).

Доказательство. Пусть P — вершина конуса K, F — его основание, F' — сечение конуса плоскостью α', параллельной плоскости основания α (рис. 162, *б*).

Докажем, что фигуры F' и F подобны. Для этого каждой точке $X \in F$ сопоставим точку $X' \in F'$, в которой отрезок PX пересекает плоскость α'.

Проведём высоту PA конуса K, и пусть A' — точка, в которой высота PA пересекает плоскость α'. Отрезок PA' является высотой конуса K', отсечённого плоскостью α'.

Возьмём любые две точки X, Y основания F, и пусть X', Y' — соответствующие им точки F'. Рассмотрим треугольники PXY и $P'X'Y'$.

Они подобны, так как отрезки $X'Y'$ и XY параллельны (поскольку плоскость PXY пересекает параллельные плоскости α' и α по параллельным прямым). Поэтому

$$X'Y' : XY = PX' : PX.$$

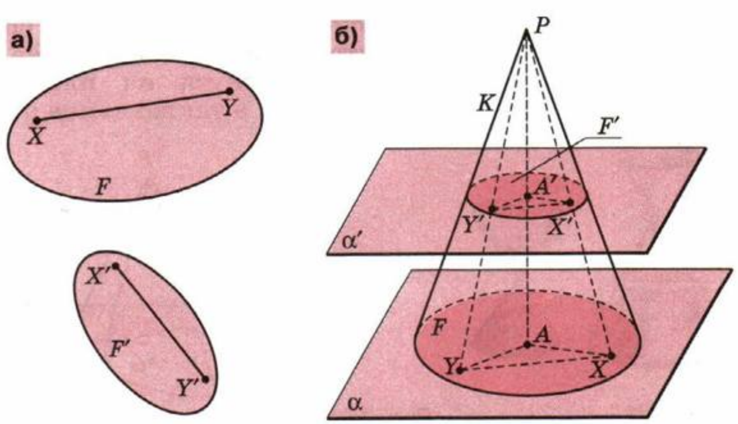


Рис. 162

Теперь рассмотрим треугольники PAX и $PA'X'$. Они также подобны, и потому

$$PX' : PX = PA' : PA.$$

Из этих равенств следует, что

$$X'Y' : XY = PA' : PA.$$

Это и означает подобие фигур F' и F. ■

Замечание. Коэффициент подобия $k = PA' : PA$, т. е. коэффициент подобия равен отношению расстояния от вершины конуса до плоскости сечения к высоте конуса.

19.2 **Конус вращения.** Рассмотрим конус, у которого основание — круг, а вершина P проектируется в центр O его основания (рис. 163). Как следует из теоремы о сечении конуса, в пересечении такого конуса с плоскостями, параллельными основанию (и тем самым перпендикулярными его высоте PO), получаются круги с центрами на высоте PO (рис. 164, *а*). Следовательно, *рассматриваемый конус является фигурой вращения*: его высота и есть его **ось вращения.** Поэтому такой конус называют конусом вращения.

Итак, **конусом вращения называется конус, основание которого — круг и вершина которого проектируется в центр основания.**

Осевые сечения конуса вращения — это его сечения плоскостями, проходящими через ось (рис. 164, *б*). Все такие сечения представляют собой равнобедренные треугольники (почему?). «Половина» этого сечения — прямоугольный треугольник с катетом на оси. Прямой круговой конус и получается вращением такого треугольника

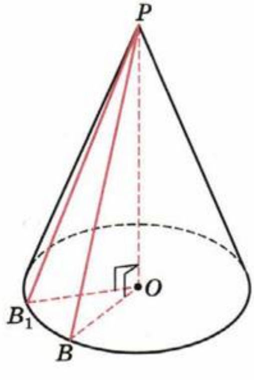


Рис. 163

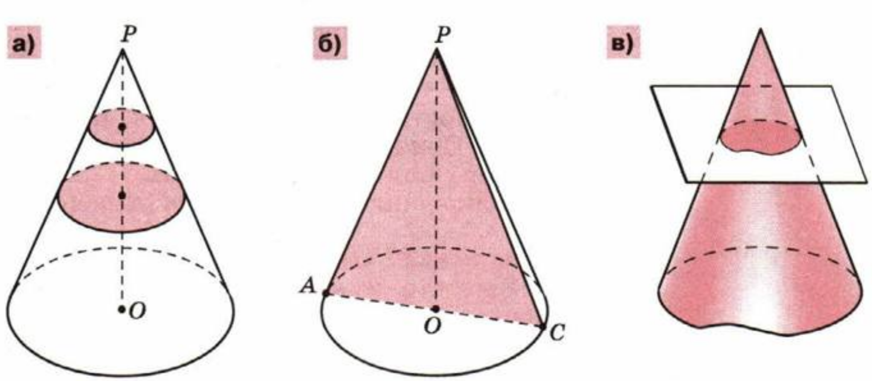


Рис. 164

вокруг этого катета или равнобедренного треугольника вокруг оси симметрии. Любая плоскость, проходящая через ось конуса вращения, является его плоскостью симметрии.

Фигура, состоящая из тех образующих конуса вращения, которые соединяют его вершину с окружностью основания, называется **боковой поверхностью** этого **конуса**. Она сама является конусом с той же вершиной, а основанием его служит окружность основания конуса вращения. **Поверхностью конуса вращения** называется объединение его основания и его боковой поверхности.

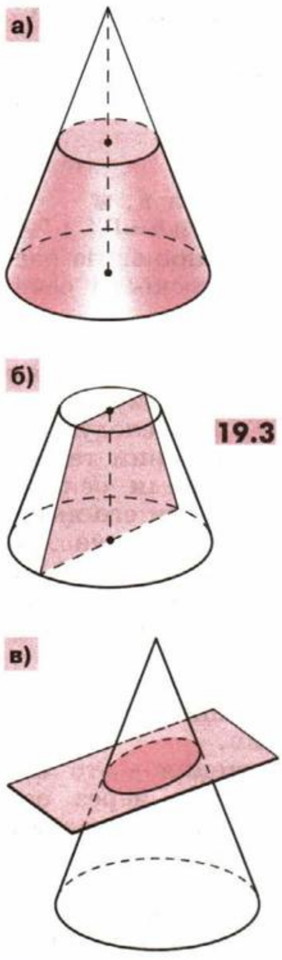


Рис. 165

19.3 **Усечённый конус.** **Усечённый конус** получается, если от конуса отсечь меньший конус плоскостью, параллельной основанию (рис. 164, *в*). В усечённом конусе два основания: «нижнее» — основание исходного конуса и «верхнее» — основание отсекаемого конуса; по теореме о сечении конуса оно подобно «нижнему» основанию.

Высотой усечённого конуса называется перпендикуляр, опущенный из точки плоскости одного основания на плоскость другого. Все такие перпендикуляры равны (см. п. 14.2). Высотой называют также их длину, т. е. расстояние между плоскостями оснований.

Усечённый конус вращения получается из конуса вращения (рис. 165, *а*). Поэтому его основания и все параллельные им сечения — круги с центрами на одной прямой — на оси. Усечённый конус вращения получается вращением прямоугольной трапеции вокруг её боковой стороны, перпендикулярной основаниям, или равнобедренной трапеции вокруг оси симметрии (рис. 165, *б*).

Боковая поверхность усечённого конуса вращения — это принадлежащая ему часть боковой поверхности конуса вращения, из которой он получен. **Поверхность усечённого конуса вращения** (или его **полная поверхность**) — это объединение его оснований и его боковой поверхности.

19.4 **Конические сечения.** ▲ Мы уже говорили в п. 18.4, что боковую поверхность цилиндра вращения плоскость пересекает по эллипсу. Так же и сечение боковой поверхности конуса вращения плоскостью, не пересекающей его основание, яв-

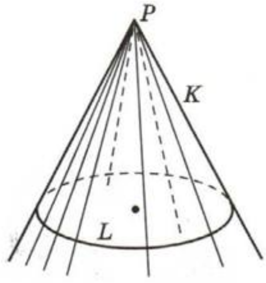
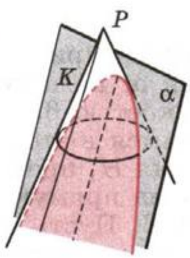
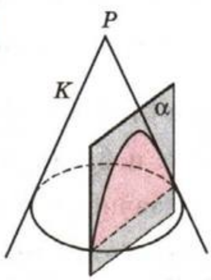


Рис. 166

а)



б)



в)

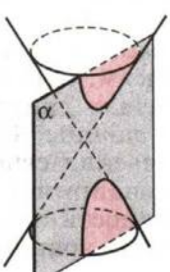


Рис. 167

ляется эллипсом (рис. 165, *в*). Поэтому эллипс называется **коническим сечением.**

К коническим сечениям относятся и другие хорошо известные кривые — гиперболы и параболы. Рассмотрим неограниченный конус, получающийся продолжением боковой поверхности конуса вращения (рис. 166). Пересечём его плоскостью α, не проходящей через вершину. Если α пересекает все образующие конуса, то в сечении, как уже сказано, получается эллипс (см. рис. 165, *в*).

Поворачивая плоскость α, можно добиться того, чтобы она пересекала все образующие конуса K, кроме одной (которой параллельна). Тогда в сечении получим *параболу* (рис. 167, *а*).

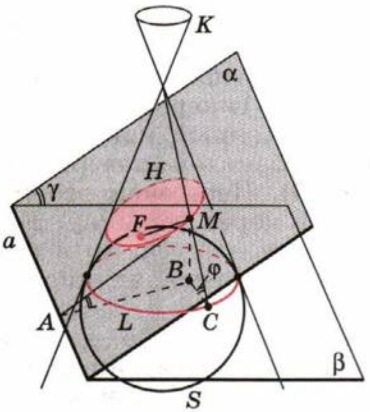
Наконец, вращая плоскость α дальше, переведём её в такое положение, при котором она пересекает часть образующих конуса K, не пересекает бесконечное множество других его образующих, причём двум из них параллельна (рис. 167, *б*). Тогда в сечении конуса K плоскостью α получаем кривую, называемую *гиперболой* (точнее, одну её «ветвь»). Та известная вам гипербола, которая является графиком функции $y = \frac{k}{x}$, есть частный случай полученной нами гиперболы.

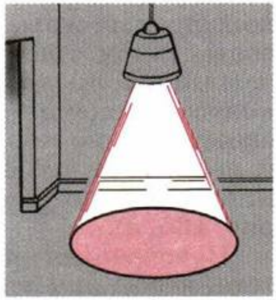
Чтобы получить обе ветви гиперболы, надо взять сечение конуса, образованного не лучами, а прямыми, проходящими через образующие боковой поверхности конуса вращения (рис. 167, *в*).

Конические сечения изучали ещё древнегреческие геометры, и их теория была одной из вершин античной геометрии. Наиболее полное исследование конических сечений в древности было проведено Аполлонием Пергским (III в. до н. э.).

Каждое коническое сечение (кроме окружности) представляет собой геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний которых от некоторой точки, называемой **фокусом,** *и некоторой прямой, называемой* **директрисой,** *постоянно.* У эллипса это отношение меньше единицы, у параболы — равно единице, а у гиперболы — больше единицы.

Если коническое сечение H получено в сечении конуса K плоскостью α, то его фокусом является точка касания F такой сферы S с плоскостью α, которая одновременно касается и





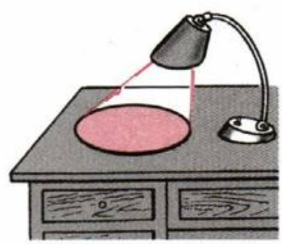


Рис. 168

конуса K по некоторой окружности L (рис. 168). Директрисой же является прямая a, по которой пересекаются плоскость α с плоскостью β, в которой лежит окружность L. Убедимся в этом.

Возьмём любую точку M сечения H, проведём отрезок MF, перпендикуляр MA на прямую a и перпендикуляр MB на плоскость β. Пусть образующая конуса K, проходящая через точку M, пересекает окружность L в точке C. Тогда $MF = MC$ (задача 16.14), $MC = \dfrac{MB}{\sin\varphi}$, где φ — угол наклона образующих конуса K к плоскости β, $MA = \dfrac{MB}{\sin\gamma}$, где γ — угол между плоскостями α и β. Поэтому отношение $\dfrac{MF}{MA} = \dfrac{MC}{MA} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ и не зависит от выбора точки M на сечении H. Попробуйте проверить, что для любой точки X плоскости α, не принадлежащей сечению H, отношение $\dfrac{XF}{|Xa|} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\varphi}$.

Конические сечения играют важную роль в природе: например, по эллиптическим, параболическим и гиперболическим орбитам движутся тела в поле тяготения (вспомните законы Кеплера). Замечательные свойства конических сечений используются в науке и технике, например при изготовлении прожекторов (поверхность зеркала в прожекторе может быть получена вращением дуги параболы вокруг её оси).

Мы можем наблюдать конические сечения как границы тени от круглых абажуров. ▼

Вопросы для самоконтроля

1 Какие вы знаете свойства конуса?
2 Какие вы знаете свойства конуса вращения?
3 Какой фигурой является сечение конуса вращения плоскостью: а) параллельной основанию; б) проходящей через вершину конуса?

Задачи

В задачах, если нет специальных оговорок, под конусом понимается конус вращения, а под усечённым конусом — усечённый конус вращения. В задачах под образующей конуса понимается образующая его поверхности.

19.1. Дополняем теорию | В конусе радиуса R и высоты H проводятся сечения, параллельные основанию. Выразите как функцию от x площади этих сечений, где x — расстояние от вершины конуса до этих сечений.

19.2. Дополняем теорию | Докажите, что около конуса можно описать сферу. Это означает, что найдётся сфера, на которой лежит вершина конуса и окружность его основания. **Конус** в таком случае называется **вписанным в сферу**, **а сфера — описанной около конуса**. Верно ли аналогичное утверждение для усечённого конуса?

19.3. Дополняем теорию | Докажите, что в конус можно вписать сферу. Это означает, что найдётся сфера, которая лежит в конусе, касается основания, а с боковой поверхностью конуса имеет общую окружность. **Конус** в этом случае называется **описанным около сферы**, **а сфера — вписанной в конус**.

19.4. Какой фигурой является проекция конуса на плоскость, которая параллельна: а) основанию конуса; б) оси конуса? Ответьте на эти же вопросы для усечённого конуса.

19.5. Какой из отрезков, соединяющих вершину конуса с точками на его основании: а) самый длинный; б) самый короткий; в) составляет с плоскостью основания наибольший угол; г) составляет с плоскостью основания наименьший угол?

19.6. Докажите, что все образующие поверхности конуса: а) составляют с плоскостью основания равные углы; б) одинаково удалены от центра основания.

19.7. Пусть R — радиус основания конуса, L — длина образующей его поверхности, H — его высота, D — диаметр описанного шара. а) Найдите H, если $R=2$ и $L=3$. б) Найдите H, если $R=1$ и угол между образующими осевого сечения равен φ. в) Докажите, что $L^2=D\cdot H$ и $R^2=H(D-H)$. Из каждой формулы выразите диаметр шара.

19.8. Пусть R_1 и R_2 — радиусы оснований усечённого конуса, а L — длина образующей его поверхности. Чему равна его высота, если: а) $R_1=2R_2=L=1$; б) $L=1$, а угол между образующими осевого сечения равен $60°$?

19.9. а) Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник (такой конус называется равносторонним). Докажите, что другого такого сечения у него нет. Решите аналогичную задачу для прямоугольного треугольника.

б)* Осевое сечение конуса — тупоугольный треугольник. Докажите, что у него найдутся сечения, являющиеся прямоугольными треугольниками.

19.10. В конусе через его вершину проводятся всевозможные равные сечения. Докажите, что их плоскости: а) одинаково удалены от центра основания конуса; б) образуют равные углы с осью конуса; в) образуют равные углы с плоскостью основания конуса. Проверьте обратные утверждения.

19.11. В конусе проводится сечение, параллельное основанию. а) Какую часть составляет его площадь от площади основания, если оно проходит через середину оси? б) Через какую точку оси оно проходит, если его площадь составляет половину площади основания?

19.12. Как найти радиус шара, вписанного в конус?

19.13. Дан шар радиуса 2. В каких границах находится площадь осевого сечения конуса, вписанного в этот шар?

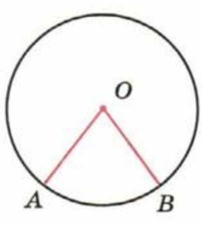
§20 Геометрия окружности

Фигуры вращения состоят из семейств окружностей. Поэтому для решения более сложных задач о фигурах вращения полезно продолжить знакомство со свойствами окружностей. Этому и посвящён настоящий параграф.

20.1 **Окружности и углы.** Напомним, что *центральный угол окружности измеряется соответствующей ему дугой окружности* (рис. 169, *а*), а *вписанный угол окружности измеряется половиной дуги, на которую он опирается* (рис. 169, *б*).

Следующая теорема содержит эти два результата как свои частные случаи.

а)



б)

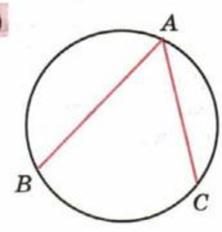
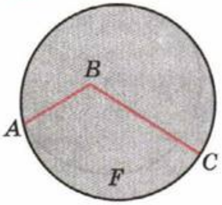


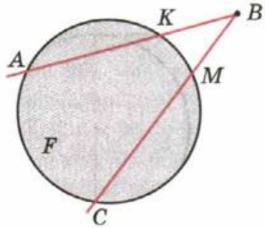
Рис. 169 $\angle AOB = \smile AB$ $\angle BAC = \frac{1}{2}\smile BC$

Теорема 20. **Угол, вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух его дуг, из которых одна заключена между сторонами угла, а другая — между продолжениями сторон угла.**

а)



а)



б)

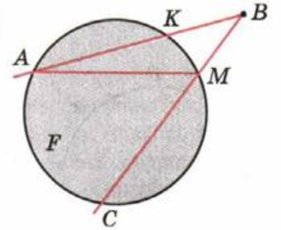


Рис. 171

б)

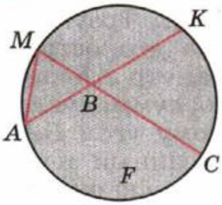


Рис. 170

Доказательство. Пусть вершина B угла ABC лежит внутри круга F, а точки A и C лежат на его окружности (рис. 170, *а*). Продолжив стороны угла B за его вершину до пересечения с окружностью круга F, получим его хорды AK и CM (рис. 170, *б*). Проведём хорду AM и рассмотрим вписанные в F углы CMA и KAM. Они измеряются соответственно половинами дуг AC и KM, на которые они опираются. Угол ABC — внешний угол треугольника ABM. Он равен сумме углов A и M этого треугольника. Поэтому он измеряется полусуммой дуг AC и KM. ■

Теорема 21. Угол, вершина которого лежит вне круга и стороны которого пересекают его окружность, измеряется полуразностью двух дуг, заключённых между его сторонами.

Доказательство. Пусть вершина B угла ABC лежит вне круга F, точки A и C лежат на окружности круга F и отрезки BA и BC пересекают её соответственно в точках K и M (рис. 171, *а*). Проведём хорду AM (рис. 171, *б*). Внешний угол AMC треугольника ABM равен сумме углов A и B этого треугольника. Поэтому угол B равен разности углов AMC и MAK. А эти углы — вписанные в окружность круга F и измеряются соответственно половинами дуг AC и KM, на которые они опираются. Следовательно, угол B измеряется полуразностью этих дуг. ■

Теорема 22. Угол между касательной к окружности и её хордой, проведённой из точки касания, измеряется половиной дуги окружности, заключённой внутри угла.

Доказательство. Пусть из точки A окружности F проведены хорда AC и касательная AB.

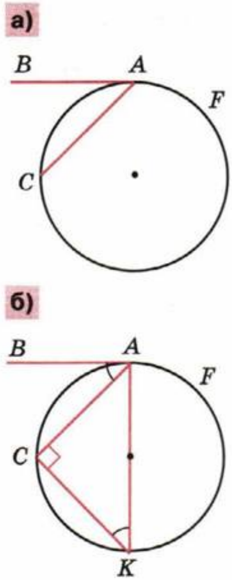


Рис. 172

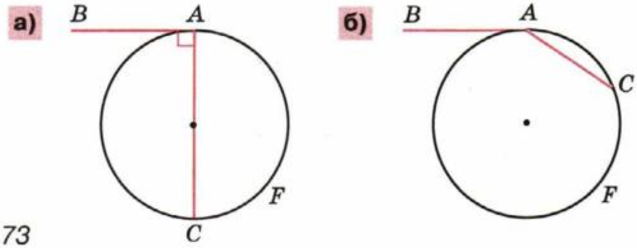


Рис. 173

Рассмотрим случай, когда угол BAC острый (рис. 172, *а*). Проведём из точки A диаметр AK и проведём хорду CK (рис. 172, *б*). Треугольник ACK — прямоугольный. Сумма его острых углов A и K равна 90°. Так как диаметр AK перпендикулярен касательной AB, то сумма углов BAC и CAK тоже равна 90°. Поэтому угол BAC равен углу AKC. Угол AKC — вписанный и измеряется половиной дуги AC, на которую он опирается. Следовательно, и угол BAC измеряется половиной дуги AC. Но эта дуга и является дугой, заключённой внутри угла BAC. Для острого угла BAC теорема доказана. Случаи прямого и тупого угла BAC (рис. 173, *а*, *б*) разберите самостоятельно. ■

20.2 Пропорциональность отрезков хорд и секущих

Теорема 23. Если две хорды AB и CD одной окружности пересекаются в точке M (рис. 174, *а*), то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Доказательство. Проведём хорды AC и BD (рис. 174, *б*). Получим два треугольника CAM и BDM. Они подобны, так как в них соответственно равны углы: $\angle A = \angle D$ (как опирающиеся на одну и ту же дугу BC) и $\angle C = \angle B$ (как опирающиеся на одну и ту же дугу AD). Поэтому $AM : MD = CM : MB$. Из этой пропорции и следует, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. ■

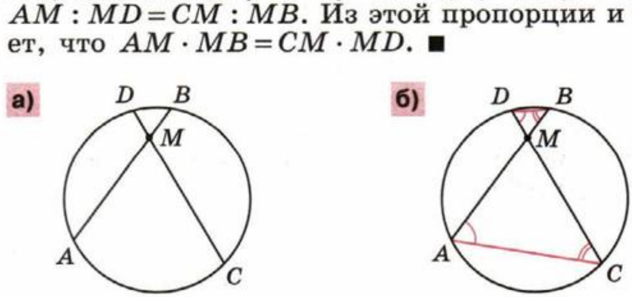


Рис. 174

Интересно, что равенство, доказанное в теореме 23, будет верным и для двух секущих одной окружности. А **секущей** для окружности называется луч с началом в некоторой точке M, взятой вне окружности, который пересекает данную окружность.

Теорема 24. Если из точки M вне окружности проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках A и B, а другая — в точках C и D, то $AM \cdot MB = CM \cdot MP$.

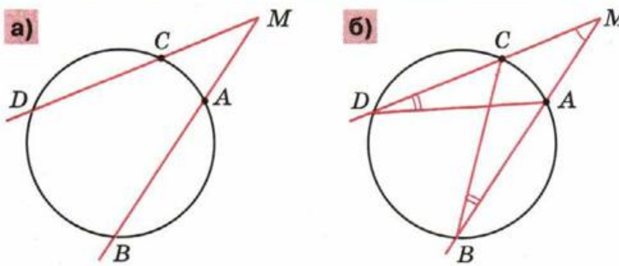


Рис. 175

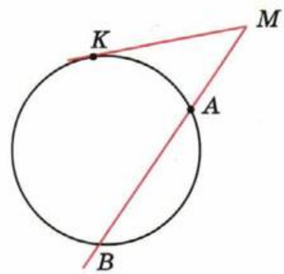


Рис. 176

Доказательство. Можно считать, что точка A лежит на отрезке MB, а точка C лежит на отрезке MD (рис. 175, *а*). Проведём хорды BC и AD (рис. 175, *б*). Треугольники MBC и MDA подобны: у них угол M общий, а вписанные углы ABC и ADC равны как опирающиеся на одну и ту же дугу AC. Записав пропорциональность их сторон, как и при доказательстве предыдущей теоремы, приходим к равенству $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. ■

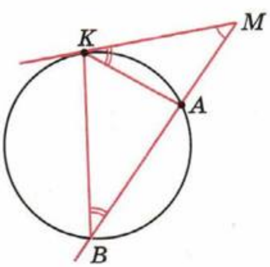


Рис. 177

Если представить себе, что секущий луч MC, вращаясь вокруг точки M, займёт положение луча, касающегося окружности в точке K (рис. 176), тогда окажется, что точки C и D совпадут, и получим, что $CM = MD = MK$. И из равенства $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ получим равенство $AM \cdot MB = MK^2$. Формулировать словами это равенство можно так:

Теорема 25. Квадрат отрезка касательной, проведённой из некоторой точки вне окружности до точки касания, равен произведению отрезка секущей окружности на внешнюю часть этой секущей.

Доказать эту теорему можно и рассмотрев два подобных треугольника MBK и MKA (рис. 177). Сделайте это самостоятельно.

20.3 Вычисление радиусов окружностей, описанной вокруг треугольника и вписанной в него. Выведем формулы, выражающие радиусы R и r окружностей, описанной вокруг треугольника и вписанной в него. Оказывается, что диаметр $2R$ окружности, описанной вокруг треугольника, — это отношения, стоящие в теореме синусов, т. е.

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \qquad (1)$$

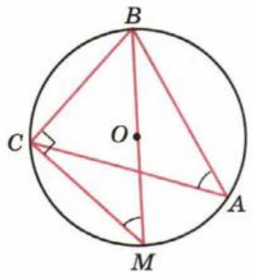


Рис. 178

□ Докажем равенство (1). Проведём через центр O окружности, описанной вокруг треугольника ABC, диаметр BM (рис. 178). Получим прямоугольный треугольник BMC с гипотенузой BM. Тогда

$$BM = \frac{BC}{\sin M}. \qquad (2)$$

Но вписанные углы A и M опираются на одну и ту же дугу BC. Поэтому $\angle A = \angle M$. Так как $BM = 2R$ и $BC = a$, то из равенства (2) следует равенство (1). ■

Согласно равенству (1) $\sin A = \frac{a}{2R}$. Если подставить это выражение для $\sin A$ в формулу для площади $S = \frac{1}{2} bc \sin A$, то получим, что

$$S = \frac{abc}{4R}. \qquad (3)$$

Из формулы (3) можно найти R через стороны треугольника ABC (выразив S по формуле Герона).

Рассмотрим теперь окружность, вписанную в треугольник ABC. Пусть точка O — её центр, а r — её радиус (рис. 179). Площадь S треуголь-

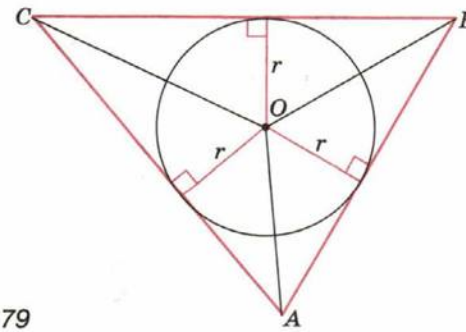


Рис. 179

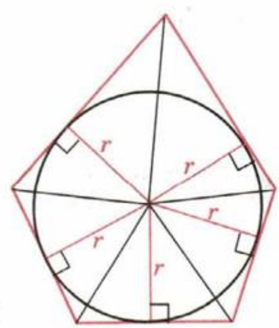


Рис. 180

ника ABC, его периметр $P = a + b + c$ и радиус r вписанной в него окружности связаны равенством

$$S = \frac{1}{2} Pr. \tag{4}$$

□ Действительно, высоты треугольников OBC, OAB и OAC, проведённые из вершины O, равны r. А сумма площадей этих треугольников равна S. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = \frac{1}{2} (a + b + c) r = \frac{1}{2} Pr,$$

т. е. имеет место равенство (4). ■

Из равенства (4) и находят радиус вписанной окружности (зная стороны треугольника).

Равенство (4) справедливо и для любого многоугольника, в который можно вписать окружность. Докажите его самостоятельно, разбив многоугольник на треугольники с общей вершиной в центре вписанной окружности и основаниями на сторонах многоугольника (рис. 180).

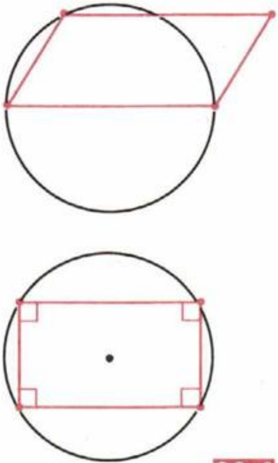


Рис. 181

20.4 Вписанные и описанные четырёхугольники.

Вокруг многоугольника, число сторон которого больше трёх, не всегда можно описать окружность. Например, вокруг параллелограмма можно описать окружность лишь в том случае, когда параллелограмм — прямоугольник (рис. 181). И вписать окружность в многоугольник, число сторон которого больше трёх, возможно не всегда. Например, в параллелограмм можно вписать окружность лишь тогда, когда этот параллелограмм — ромб (рис. 182).

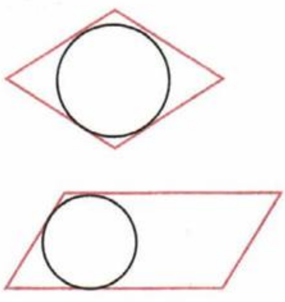


Рис. 182

Если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° (*свойство вписанных четырёхугольников*).

□ Действительно, пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 183). Тогда сумма его углов A и C измеряется полусуммой дуг BCD и BAD, составляющих полную окружность, а потому равна 180°. ■

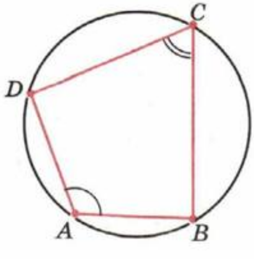


Рис. 183

Свойство это является характерным, т. е. справедливо и обратное ему утверждение: **если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то вокруг четырёхугольника можно описать окружность** (*признак вписанного четырёхугольника*).

□ Пусть сумма углов A и C четырёхугольника $ABCD$ равна 180°. Заметим, что и сумма двух

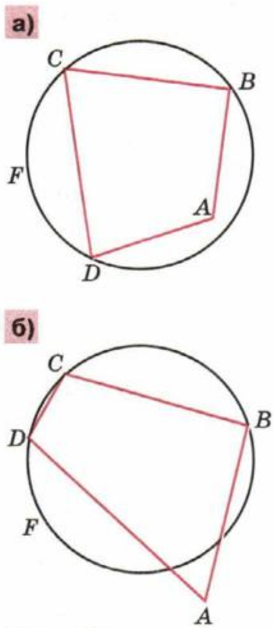


Рис. 184

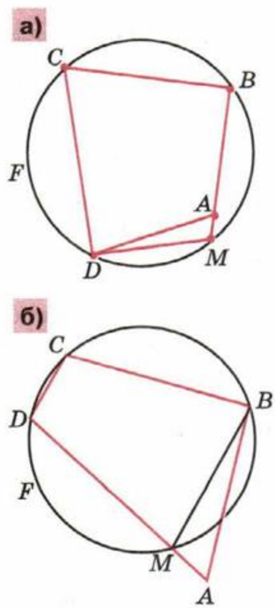


Рис. 185

других противоположных углов этого четырёхугольника равна 180°, а также что четырёхугольник $ABCD$ выпуклый (у невыпуклого четырёхугольника один из углов больше 180°). Проведём через три его вершины B, C и D окружность F и покажем, что четвёртая его вершина A также лежит на F. Допустим противное. Тогда возможны два случая: 1) A лежит внутри круга, ограниченного F (рис. 184, *а*); 2) A лежит вне этого круга (рис. 184, *б*).

Рассмотрим первый случай. Продолжим тогда сторону BA за точку A до пересечения с окружностью F в точке M и проведём хорду MD (рис. 185, *а*). Четырёхугольник $BCDM$ вписан в окружность F. Как доказано, $\angle C + \angle M = 180°$. Но $\angle A > \angle M$ (как внешний угол треугольника DMA), а значит, $\angle A + \angle C > 180°$. Получили противоречие. Следовательно, точка A не может лежать внутри круга, ограниченного окружностью F.

К противоречию во втором случае придите самостоятельно (рис. 185, *б*). Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность F. ■

Итак, **для того чтобы четырёхугольник можно было вписать в окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противоположных углов была равна 180°.**

Выясним теперь, в какие четырёхугольники можно вписать окружность.

□ Пусть в четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность F и K, L, M, N — точки касания F со сторонами AB, BC, CD, DA соответственно (рис. 186). Так как $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$, то $AB + CD = BC + AD$. ■

Тем самым мы доказали, что **если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны** (*свойство описанного четырёхугольника*).

Для выпуклых четырёхугольников свойство это является характерным, т. е. справедливо и обратное ему утверждение: **если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность** (*признак описанного четырёхугольника*). Докажем это утверждение.

□ Пусть для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выполняется равенство

$$AB + CD = BC + AD. \quad (5)$$

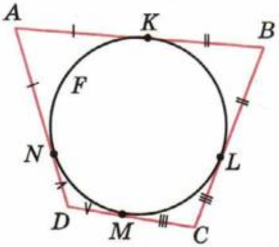


Рис. 186

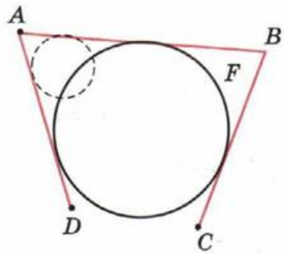


Рис. 187

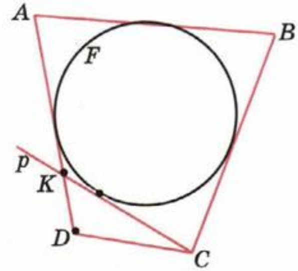


Рис. 188

Среди окружностей, касающихся сторон AB и AD, найдётся окружность F, касающаяся ещё одной из сторон четырёхугольника $ABCD$ и лежащая в нём. Будем считать, что F касается сторон AB, BC и AD (рис. 187). Покажем, что F касается и стороны CD. Допустим противное. Проведём из точки C луч p, который касается окружности F и пересекает сторону AD в точке K (рис. 188). Получим треугольник CDK. Окружность F вписана в четырёхугольник $ABCK$. Поэтому

$$AB + CK = BC + AK. \qquad (6)$$

Вычитая равенство (6) из равенства (5), получаем, что $CD - CK = AD - AK$.

Так как $AD - AK = KD$, то предыдущее равенство приводит к соотношению $CD = CK + KD$, которое противоречит неравенству треугольника. Следовательно, окружность касается и стороны CD, т. е. вписана в четырёхугольник $ABCD$. ■

Итак, **для того чтобы в выпуклый четырёхугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных сторон были равны.**

Задачи

Задачи к п. 20.1

20.1. Точки A, B, C и D лежат на окружности и разбивают её на дуги AB, BC, CD и DA, градусные меры которых относятся как $4 : 1 : 2 : 5$. Хорды AC и BD пересекаются в точке K. Найдите: а) углы четырёхугольника $ABCD$; б) углы AKB и BKC; в) угол между прямыми AB и CD; г) угол между прямыми BC и AD.

20.2. Хорда AB некоторой окружности пересекает её диаметр CD в точке K. Градусная мера дуги AC равна φ, а $\angle AKC = \alpha$. Найдите градусные меры дуг DA, BD и CB этой окружности.

20.3. Через концы дуги окружности, градусная мера которой φ ($\varphi < 180°$), проведены касательные прямые к этой окружности. Найдите угол между этими прямыми.

20.4. Угол между двумя касательными лучами, проведёнными из некоторой точки к одной окружности, равен α. Найдите градусные меры дуг, на которые разобьют эту окружность их точки касания.

20.5. Точка B лежит на дуге AC некоторой окружности (дуга AC меньше полуокружности). Градусные меры её дуг AB и BC равны соответственно α и β. Через точку B проводится касательная прямая к окружности. Найдите угол между этой касательной и прямой AC. Сформулируйте теорему об измерении угла между касательной и секущей, проведёнными из одной точки.

20.6. В окружности проведена хорда AB. Через точку C этой окружности к ней проведена касательная. Пусть расстояния от точек A и B до этой касательной равны a и b. Найдите расстояние от точки C до хорды AB.

20.7. На сторонах четырёхугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они накрывают четырёхугольник полностью.

20.8. Около треугольника описана окружность. Проводится биссектриса угла этого треугольника. Докажите, что она пересекает описанную окружность в точке, лежащей на серединном перпендикуляре стороны данного треугольника.

20.9. Две окружности внутренне касаются в точке P. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке Q. Докажите, что луч PQ делит угол APB пополам.

Задачи к п. 20.2

20.10. В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках K и L, а другая — в точках M и N. Докажите, что на прямой KN эти окружности высекают равные хорды.

20.11. Докажите, что касательные к двум пересекающимся окружностям из всякой точки продолжения их общей хорды равны между собой.

20.12. Постройте окружность, проходящую через две заданные точки одной стороны угла и касающуюся другой его стороны.

20.13. Около треугольника ABC со сторонами a, b, c ($b < c$) описана окружность. а) Через точку A проведена касательная, которая пересекает луч BC в точке D. Вычислите AD и CD. б) Пусть K и L — точки на луче BC, в которых биссектрисы угла A и внешнего к нему угла пересекают луч BC. Докажите, что точка D — середина отрезка KL.

20.14. Исследуем | В окружности известны диаметр и длины двух хорд. Достаточно ли этого, чтобы выяснить, пересекаются эти хорды или нет? А если, кроме этого, известно, что хорды взаимно перпендикулярны?

20.15. Прикладная геометрия | Космический корабль находится над Землёй на высоте 300 км. Каков радиус окружности горизонта, наблюдаемой с этого корабля? Радиус Земли приблизительно 6370 км.

20.16. Исследуем | Из середины C полуокружности радиуса R проведены хорды CA и CB в концы диаметра AB этой полуокружности. Проведена хорда KL, параллельная диаметру AB. а) Докажите, что хорда KL может разделиться хордами CA и CB на равные части. б) Найдите зависимость между длинами частей хорды KL, когда K и L — середины дуг CA и CB.

20.17. Исследуем | Нарисуйте окружность и её диаметр AB. Через точку B проведите касательную к этой окружности. Через точку A и точку X этой окружности проведите луч, который пересекает эту касательную в точке P. Зависит ли величина $AX \cdot AP$ от положения точки X на окружности?

20.18. Две прямые взаимно перпендикулярны. Выбраны два вертикальных угла, образованные ими, и в каждый из них вписана окружность. К ним проведена общая внешняя касательная. Радиусы окружностей известны. Как найти длину отрезка этой касательной, ограниченного двумя данными прямыми?

20.19. Три круга имеют общую точку. Докажите, что три общие хорды каждой пары этих кругов имеют общую точку.

20.20. В окружность вписан шестиугольник. При этом каждая пара противоположных сторон лежит на пересекающихся прямых. Докажите, что три полученные точки пересечения лежат на одной прямой (теорема Паскаля).

Задачи к п. 20.3

20.21. Как найти неизвестную сторону треугольника, если известны две его стороны и радиус описанной окружности?

20.22. Известны две стороны треугольника и высота к третьей его стороне. Как вычислить радиус его описанной окружности?

20.23. В треугольнике ABC $AB = 4$ и $AC = 5$, а радиус описанной окружности равен $\sqrt{7}$. а) Чему равна его площадь? б) Найдите BC.

20.24. а) Пусть стороны данного треугольника ABC равны соответственно a, b, c. Чему равно расстояние между центром описанной окружности и вершиной A? б) Пусть в треугольнике ABC $\angle A > \angle B$. Сравните между собой расстояния от центра вписанной в этот треугольник окружности до этих вершин.

20.25. S — площадь треугольника ABC, R — радиус его описанной окружности, r — радиус его вписанной окружности. Докажите, что выполняются такие соотношения:

а) $S = 0{,}5R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$; б) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$;

в) $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$; г) $r = 4R\left(\sin\left(\dfrac{A}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{B}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{C}{2}\right)\right)$, $R \geqslant \sqrt{S}$;

д) $R + r \geqslant 2\sqrt{S}$; е) $a + b + c > 4R$ (для остроугольного треугольника);

ж) $a^2 + b^2 \geqslant \dfrac{c^2}{2}$; з) $ab > 4Rr$.

20.26. Пусть точка O — центр окружности, описанной около треугольника, точка O_1 — центр окружности, вписанной в него, R — радиус его описанной окружности, r — радиус его вписанной окружности. Докажите, что $O_1^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера). Как изменится эта формула, если точка O_1 будет центром вневписанной окружности? Какие следствия можно получить из этой формулы?

20.27. Исследуем | Можно ли найти площадь равнобедренного треугольника, зная его основание и радиус описанной окружности? Если можно, то попытайтесь получить соответствующую формулу.

Задачи к п. 20.4

20.28. В треугольник с известными сторонами вписана окружность, и в нём проведена хорда, касательная к ней и параллельная стороне. Как найти её длину?

20.29. Докажите, что площадь четырёхугольника, вписанного в окружность, стороны которого равны a, b, c, d, вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где S — площадь, p — полупериметр.

20.30. В окружность вписан четырёхугольник. Докажите, что хорды этой окружности, соединяющие середины противоположных дуг, взаимно перпендикулярны.

20.31. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, пересекающая эти окружности в точках K и L, через точку B проведена прямая, пересекающая эти окружности в точках M и N (точки K и M принадлежат одной окружности, а точки L и N — другой). Докажите, что прямые KM и LN параллельны.

20.32. Докажите, что в описанном четырёхугольнике равны суммы углов, под которыми видны из центра вписанной окружности противоположные стороны.

20.33. В треугольнике ABC проведены высоты AK и BM. Докажите, что: а) вокруг четырёхугольника $ABKM$ можно описать окружность; б) треугольники ABC и KMC подобны.

20.34. а) Треугольник вписан в окружность. Произвольная точка окружности проектируется на все стороны треугольника. Докажите, что все проекции лежат на одной прямой (прямая Симсона). б) Проверьте обратное утверждение.

20.35. Две окружности имеют общую хорду AB. Через точку A проведена прямая, которая пересекает первую и вторую окружности в точках C и D соответственно. В этих точках проводятся касательные к первой и второй окружностям соответственно. Эти касательные пересекаются в точке K. Докажите, что точки B, C, K, D лежат на одной окружности.

20.36. Пусть стороны четырёхугольника равны a, b, c, d. Известно также, что в него можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Докажите, что его площадь S можно вычислить по формуле $S = \sqrt{abcd}$.

20.37. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые BC и AD пересекаются в точке Q. а) Докажите, что биссектрисы углов P и Q взаимно перпендикулярны. б) Проверьте обратное утверждение.

20.38. В угол вписаны две окружности, которые касаются между собой. Четыре полученные точки касания являются вершинами четырёхугольника. а) Докажите, что в него можно вписать окружность. б) Пусть радиусы данных окружностей известны. Чему равен радиус окружности, вписанной в полученный четырёхугольник?

20.39. Рассматриваются всевозможные четырёхугольники с фиксированными сторонами. Докажите, что среди них существует четырёхугольник, который можно вписать в круг.

20.40. Диаметр окружности является основанием трапеции, вписанной в неё. Какая из таких трапеций имеет наибольший периметр?

20.41. В данную окружность вписаны четырёхугольники. Какой из них имеет: а) наибольшую площадь; б) наибольший периметр?

20.42. Вокруг окружности радиуса R описаны трапеции. В каких границах изменяются их: а) периметры; б) площади?

Задачи к главе III

III.1. а) Проведены два параллельных сечения шара. Докажите, что центр шара лежит на прямой, проходящей через центры этих сечений.
б) В шаре радиуса R проведено сечение радиуса r. Чему равно расстояние между ним и параллельным ему большим кругом? в) В шаре радиуса 3 проведены два сечения радиусами 1 и 2, плоскости которых параллельны. Вычислите расстояние между ними. г) Составьте задачи, обратные задачам б) и в).

III.2. а) Даны два круга в одном шаре, окружности которых лежат на сфере и имеют единственную общую точку. Докажите, что прямая пересечения плоскостей, в которых лежат эти круги, имеет с шаром единственную общую точку. б) На сфере проведены две окружности, имеющие единственную общую точку. Докажите, что центр сферы, центры обеих окружностей и их общая точка лежат в одной плоскости. в) На сфере радиуса R провели два сечения одного радиуса r, имеющие одну общую точку. Их плоскости образуют угол φ. Установите связь между R, r, φ.

III.3. В шаре радиуса R два сечения радиуса r пересекаются под углом φ. Их пересечением является хорда длиной d. Установите связь между R, r, d, φ.

III.4. В данную сферу вписаны: а) цилиндр; б) конус; в) усечённый конус. Их размеры известны. Как найти расстояния от центра сферы до оснований и боковых поверхностей цилиндра, конуса и усечённого конуса?

III.5. Четыре равных шара радиуса R расположены так, что каждый касается трёх остальных. Три из этих шаров лежат на горизонтальной плоскости, а четвёртый шар лежит над ними. Какова высота этого сооружения? Как найти радиус шара, описанного около этого сооружения.

III.6. Три цилиндра расположены так, что каждые два имеют единственную общую точку. Эта общая точка находится внутри образующей каждого из цилиндров. Оси цилиндров взаимно перпендикулярны, и одна из них вертикальна. Радиус каждого цилиндра равен R. Найдите радиус шара, который, падая вертикально, пройдёт через зазор, образованный цилиндрами.

III.7. В шаре радиуса R находится цилиндр с наибольшим по площади осевым сечением. Каковы размеры этого цилиндра?

III.8. Рассмотрите всевозможные цилиндры с диагональю осевого сечения, равной d. Вычислите радиус наибольшего шара, содержащегося в таком цилиндре, и радиус наименьшего шара, содержащего такой цилиндр.

III.9. В цилиндре, у которого высота равна диаметру основания и равна d, надо разместить два одинаковых шара. Каков их наибольший радиус?

III.10. Два равных конуса имеют общую вершину. Их боковые поверхности пересекаются по двум образующим. Докажите, что плоскость, проходящая через эти образующие, перпендикулярна плоскости, содержащей оси конусов.

III.11. Два равных конуса имеют параллельные оси. Имеют ли они общую опорную плоскость, проходящую через образующие их поверхностей?

III.12. Докажите, что окружность является линией пересечения (если такая существует): а) боковых поверхностей конуса и цилиндра, оси которых лежат на одной прямой); б) боковых поверхностей двух конусов, оси которых лежат на одной прямой.

III.13. Центр сферы лежит в вершине конуса. Радиус сферы меньше образующей боковой поверхности конуса. Докажите, что сфера пересекает боковую поверхность конуса по окружности.

III.14. а) На реальной сфере нарисована окружность. Как вычислить её радиус? б) Как вычислить радиус реальной сферы (шара)?

Применяем компьютер

III.15. Дана прямая p и отрезок AB на прямой, параллельной прямой p. Найдите на прямой p такую точку X, чтобы угол AXB был наибольшим.

III.16. Среди всех равнобедренных треугольников ABC, описанных около данной окружности, касающейся основания AC, найдите треугольник наименьшей площади.

III.17. Найдётся ли на заданной прямой точка, из которой два равных круга видны под равными углами?

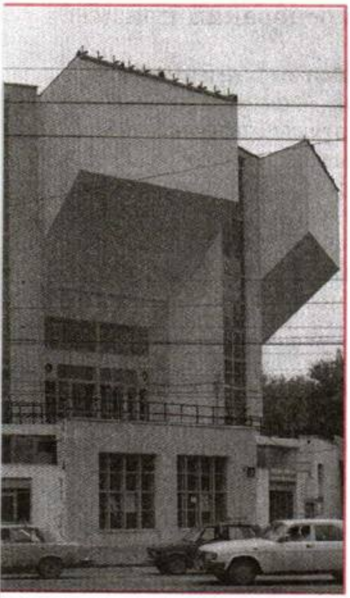
III.18. Впишите в данную окружность прямоугольник наибольшей площади.

III.19. Дана окружность с центром O. В ней проведена хорда AB, отличная от диаметра, и радиус OC, перпендикулярный этой хорде. Пусть D — точка пересечения этого радиуса и этой хорды. Точка X движется по большей дуге окружности. Из неё проводятся две хорды: XK, проходящая через точку D, и XC. Пусть L — точка пересечения хорд XC и AB. Какой из отрезков длиннее: KD или LC?

Итоги главы III

В § 16—19 доказаны всего три **теоремы**:
1) теорема 17 **о пересечении шара с плоскостью** (п. 16.2),
2) теорема 18 **о касании сферы и плоскости** (п. 16.3) и
3) теорема 19 **о сечении конуса** (п. 19.1).

В главе III начато обсуждение важного **вопроса о симметрии пространственных фигур**.
В § 20 изучены более сложные, чем в курсе основной школы, **вопросы геометрии окружности**.



Глава IV

МНОГОГРАННИКИ

Построения важнейших видов многогранников — призм и пирамид — мы выполнили ещё в § 5. Эти построения, проведённые для общей ситуации в § 18 и 19, привели нас к понятиям цилиндров и конусов. И теперь ясно, что призма — это частный случай цилиндра, а пирамида — это частный случай конуса. Поэтому в первых двух параграфах данной главы мы рассмотрим призмы и пирамиды, не давая общего определения многогранника, и лишь затем обратимся к этому непростому понятию и расскажем о выпуклых многогранниках и о правильных многогранниках.

§ 21 Призма

21.1 Призма — частный случай цилиндра. Построения, которые мы провели в п. 5.3 и в п. 18.1, позволяют нам дать следующее

Определение. **Призмой называется цилиндр, основание которого — многоугольник.**

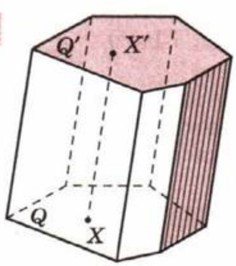
Если основание призмы — n-угольник, то призма называется n-угольной (рис. 189, a).

Введём ряд понятий, связанных с призмой. Так как основания любого цилиндра равны друг другу, то *оба основания призмы являются равными друг другу многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях* (свойство 2 п. 18.1). *Соответственные стороны этих многоугольников параллельны.*

Каждая пара соответственных сторон оснований призмы является противоположными сторонами параллелограмма, заполненного образующими призмы (рис. 189, $б$). Эти параллелограммы называются **боковыми гранями призмы.** Те стороны боковых граней, которые не лежат на основаниях, называются **боковыми рёбрами призмы.**

Объединение боковых граней призмы называется её **боковой поверхностью. Поверхностью**

а)



б)

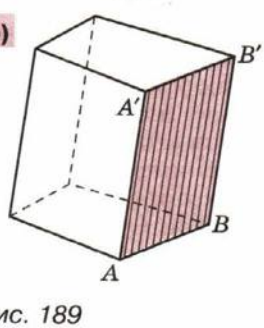


Рис. 189

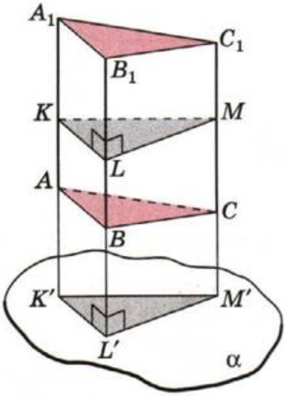


Рис. 190

призмы является объединение оснований призмы и её боковой поверхности.

Тем самым n-угольная призма ограничена двумя равными n-угольниками — основаниями — и n боковыми гранями — параллелограммами. Любой из этих параллелограммов имеет с каждым основанием по одной общей стороне. Итак, мы пришли к определению n-угольной призмы, данному в п. 5.5. А из построения призмы, проведённого в п. 5.5, вытекает, что построенная там призма — это цилиндр, основание которого — многоугольник (см. п. 18.2).

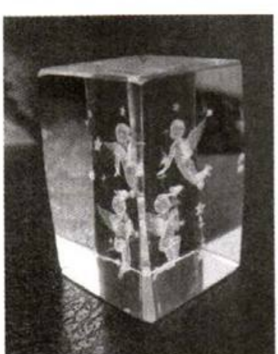
Поскольку призма — цилиндр, то все понятия, относящиеся к цилиндрам, относятся к призмам. Например, **высота призмы** — это общий перпендикуляр к плоскостям, на которых лежат основания призмы (или его длина). Призма называется **прямой**, если её боковые рёбра перпендикулярны плоскостям оснований (см. рис. 71, *а* на с. 52). Непрямые призмы называют **наклонными** (см. рис. 189).

Перпендикулярным сечением призмы называется проекция её основания на любую плоскость, перпендикулярную боковым рёбрам призмы (рис. 190). Все перпендикулярные сечения одной призмы равны друг другу. Перпендикулярные сечения прямой призмы равны её основаниям.

Напомним, что **правильной призмой** называется прямая призма, основание которой — правильный многоугольник (см. рис. 71, *б*).

21.2 Параллелепипед.

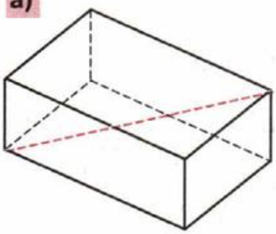
Подобно тому как тетраэдр является пространственным аналогом треугольника, так параллелепипед является пространственным аналогом параллелограмма.



Параллелепипед можно определить как призму, в основании которой — параллелограмм (см. рис. 1, *в* на с. 8). Таким образом, **параллелепипед** — это призма, у которой все грани — параллелограммы. Их всего шесть. Грани параллелепипеда составляют три пары равных и параллельно расположенных граней. Поэтому любую грань параллелепипеда можно принять за его основание.

Для каждой вершины параллелепипеда есть одна противоположная ей вершина, та, которая не лежит с данной вершиной ни в одной грани. Отрезок, соединяющий противоположные вершины параллелепипеда, называется **диагональю** параллелепипеда (рис. 191, *а*). У параллелепипеда четыре диагонали.

а)



б)

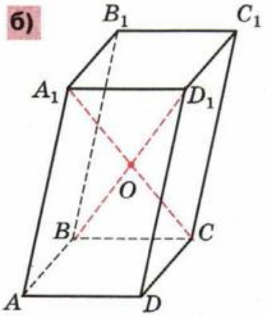
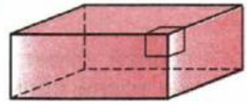


Рис. 191

а)



б)

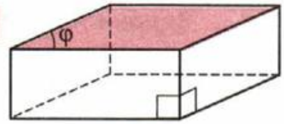


Рис. 192

$\varphi \neq 90°$

Пространственным аналогом прямоугольника является прямоугольный параллелепипед. **Параллелепипед** называется **прямоугольным**, если все его грани — прямоугольники (рис. 192, *а*). **Куб** — это прямоугольный параллелепипед, все рёбра которого равны. Куб является пространственным аналогом квадрата. Все грани куба — квадраты.

Прямоугольный параллелепипед, конечно, является прямой призмой. Но среди параллелепипедов есть и такие, которые будут прямыми призмами, но не прямоугольными параллелепипедами (рис. 192, *б*). У них есть одна пара непрямоугольных граней. Эту пару граней естественно считать **основаниями прямого параллелепипеда.**

Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам (задача 3.3, *г*). Поэтому противоположные вершины параллелепипеда симметричны относительно этой точки. Следовательно, *каждый параллелепипед имеет центр симметрии — точку пересечения его диагоналей* (см. рис. 191, *б*).

Вопросы для самоконтроля

1 Какие вы знаете определения призмы? виды призм?

2 Перечислите, какие вы знаете свойства: а) призмы; б) правильной призмы; в) параллелепипеда; г) прямоугольного параллелепипеда.

3 Расскажите, как построить перпендикулярное сечение призмы.

Задачи

21.1. Дополняем теорию | Докажите, что около правильной призмы можно описать сферу.

21.2. Дополняем теорию | При каком условии в правильную призму можно вписать сферу?

21.3. Дополняем теорию | Докажите, что около прямоугольного параллелепипеда можно описать сферу. Когда в него можно вписать сферу?

21.4. Дополняем теорию | Пусть диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с его рёбрами углы φ_1, φ_2, φ_3. Докажите, что $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$.

Задачи к п. 21.1

21.5. Сколько вершин, рёбер и граней имеет n-угольная призма?

21.6. Какую форму имеют боковые грани прямой призмы? Докажите, что плоскости этих граней перпендикулярны основанию призмы.

21.7. Объясните, почему: а) высота прямой призмы равна её боковому ребру; б) перпендикулярное сечение прямой призмы равно её основанию.

21.8. Исследуем Нарисуйте прямую треугольную призму, у которой все рёбра равны. Нарисуйте её в трёх проекциях. Какой фигурой является её сечение: а) параллельное боковой грани; б) параллельное боковому ребру; в) перпендикулярное ребру основания; г) содержащее прямую, проходящую через центры её оснований? **д)** Какого вида треугольник может быть сечением такой призмы? А четырёхугольник?

21.9. В прямой треугольной призме, все рёбра которой равны, вычислите угол φ между: а) ребром основания и боковыми гранями, в которых оно не лежит; б) диагональю боковой грани и основания; в) скрещивающимися рёбрами; г) плоскостями боковых граней; д) плоскостью основания и плоскостью, содержащей диагонали двух боковых граней.

21.10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания равно 1, а боковое ребро равно 2. Вычислите: а) расстояние между боковыми рёбрами; б) расстояние между боковым ребром и плоскостью противоположной грани; **в)** $|B_1(AC)|$; **г)** радиус описанной сферы; **д)** площадь сечения A_1B_1C.

21.11. Исследуем Какой вид имеет треугольная призма, в которой есть: а) боковое ребро, перпендикулярное основанию; б) две боковые грани, перпендикулярные основанию; в) две боковые грани, являющиеся прямоугольниками; г) грань, перпендикулярная основанию; д) грань, являющаяся прямоугольником?

21.12. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ вершина A_1 проектируется в центр треугольника ABC и все её рёбра равны. а) Какую форму имеют боковые грани этой призмы? б) Нарисуйте высоты этой призмы из вершин C и C_1. в)* Нарисуйте перпендикулярное сечение этой призмы, проходящее через вершину A_1. г) Нарисуйте проекцию вершины A_1 на грань BCC_1B_1. д) Нарисуйте проекции верхней грани и всей призмы на плоскость (ABC). е) Нарисуйте проекцию грани $A_1B_1C_1$ на плоскость (B_1BC).

21.13. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны и $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60°$. Вычислите угол φ между: а) боковым ребром и основанием; б) (A_1C_1) и (B_1BC); в) боковыми гранями и основанием; г) боковыми гранями.

Задачи к п. 21.2

21.14. Пусть рёбра прямоугольного параллелепипеда известны. Как вычислить: а) его диагональ; б) углы, которые составляет диагональ с рёбрами; в) углы между диагональю и гранями; г) радиус описанного шара?

21.15. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с двумя его смежными рёбрами углы: а) 60° и 60°; б) 45° и 60°. Какой угол φ она составляет с третьим его ребром, смежным с данными?

21.16. Исследуем Какие по форме сечения могут быть у прямоугольного параллелепипеда с разными измерениями?

21.17. **Исследуем** Можете ли вы узнать длину диагонали спичечного коробка, ничего в нём не измеряя?

21.18. **Исследуем** Каким по виду является параллелепипед, в котором: а) две грани перпендикулярны третьей грани; б) две грани — прямоугольники; в) четыре грани — прямоугольники?

21.19. **Исследуем** а) Чем отличаются прямоугольный параллелепипед и прямой параллелепипед? б) Если параллелепипед прямой, то обязательно ли он прямоугольный? А наоборот? в) Докажите, что правильная четырёхугольная призма является прямоугольным параллелепипедом. Верно ли обратное утверждение?

21.20. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани — ромбы. Острые углы этих ромбов, равные 60°, сходятся в вершине A. а) Нарисуйте высоты этого параллелепипеда из вершин A_1 и C. б) Нарисуйте перпендикулярные сечения, проходящие через точки D, C, C_1. в) Нарисуйте проекции грани $A_1B_1C_1D_1$ и всего параллелепипеда на плоскость ABC. г) Какими по форме четырёхугольниками являются диагональные сечения плоскостями AA_1C_1 и BB_1D_1?

21.21. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание — ромб с углом 60° при вершине A и $|AB| = |AA_1| = 1$. 1) Вычислите расстояния: а) от (A_1D_1) до (ABC); б) от (A_1D_1) до (BB_1C_1); в) от (AB) до (CDD_1); г) между плоскостями параллельных граней; д) между (AA_1) и (CD). 2) Найдите площади диагональных сечений.

21.22. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грани $ABCD$ и ABB_1A_1 — квадраты, $\angle AA_1D_1 = 120°$. 1) Вычислите углы между: а) (AB) и (AA_1D_1); б) (AA_1) и (ABC); в) (AD) и (CDD_1); г) соседними гранями. 2)* Какая из диагоналей составляет с основанием больший угол?

§ 22 Пирамида

22.1 **Пирамида — частный случай конуса.** Что такое пирамида, нам уже известно. О том, как построить пирамиду, было сказано в п. 5.5. Из этого построения видно, что *пирамида является конусом, основание которого — многоугольник*. Поэтому можно дать такое определение: **пирамидой** называется конус, основание которого — многоугольник (см. рис. 67 на с. 50).

Боковая поверхность пирамиды состоит из всех её образующих, которые соединяют вершину с точками на границе основания. Ясно, что боковая поверхность состоит из треугольников, имеющих общую точку — вершину пирамиды. Эти треугольники называются **боковыми гранями**, а их стороны, не лежащие в основании, — **боковыми рёбрами пирамиды.**

Поверхность пирамиды состоит из основания пирамиды и её боковой поверхности.

Усечённая пирамида получается так же, как получается усечённый конус из конуса: отсечением меньшей пирамиды плоскостью, параллельной основанию исходной пирамиды. Всё сказанное об усечённом конусе относится и к усечённым пирамидам (рис. 193).

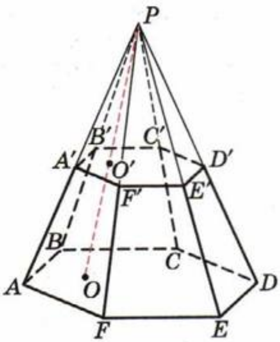


Рис. 193

22.2 **Правильная пирамида.** Напомним, что **пирамида** называется **правильной**, если её основание — правильный многоугольник и все её боковые рёбра равны. Поэтому *все боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники с вершиной в вершине пирамиды.* (Напомним, что правильная треугольная пирамида и правильный тетраэдр не одно и то же. Правильный тетраэдр является правильной треугольной пирамидой, но не наоборот!)

Согласно данному определению правильной пирамиды о любой пирамиде по её внешнему виду можно судить, правильная она или нет: достаточно произвести необходимые измерения на её гранях. Но это определение, как уже отмечалось в п. 5.5, не даёт способа построения правильных пирамид.

Ответ на этот вопрос мы получим, установив в следующей теореме характерное свойство правильной пирамиды.

Теорема 26 *(о правильной пирамиде).* **Пирамида является правильной тогда и только тогда, когда её основание — правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр основания.**

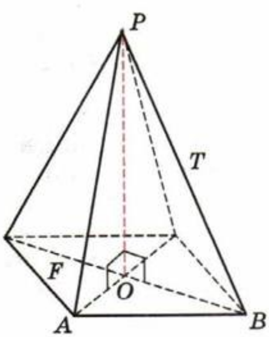


Рис. 194

Доказательство. Пусть T — правильная пирамида с вершиной P и основанием F. Опустим из точки P перпендикуляр PO на плоскость α основания F. Возьмём любые две вершины A и B основания F и проведём отрезки OA и OB, получим прямоугольные треугольники POA и POB (рис. 194). Эти треугольники равны, так как они имеют равные гипотенузы PA и PB и общий катет PO. Следовательно, равны и другие их катеты, т. е. $OA = OB$. Итак, проекция вершины P пирамиды T на плоскость α равноудалена от всех вершин правильного многоугольника F. Поэтому точка O является центром многоугольника F.

Итак, доказано, что вершина правильной пирамиды проектируется в центр её основания.

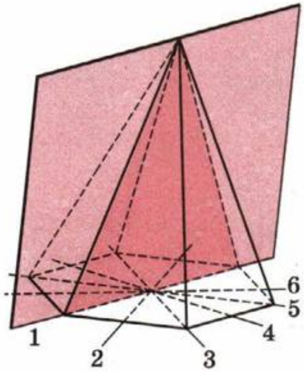


Рис. 195

Рассмотрим теперь пирамиду T, основание которой — правильный многоугольник F и вершина которой P проектируется в его центр — точку O. Снова берём две произвольные вершины A и B основания F и рассматриваем прямоугольные треугольники POA и POB. Теперь в этих треугольниках общий катет PO и равные катеты OA и OB (поскольку O — центр правильного многоугольника F). Следовательно, опять $\triangle POA = \triangle POB$. Поэтому $PA = PB$. Значит, все боковые рёбра пирамиды T равны, т. е. пирамида T правильная. ■

Доказанная теорема показывает, что *правильную пирамиду можно определить как такую пирамиду, у которой основание — правильный многоугольник и вершина проектируется в его центр*.

Теперь ясно, как построить правильную пирамиду. Надо взять правильный многоугольник F и из его центра O провести какой-нибудь перпендикуляр OP к плоскости многоугольника F. Точка P будет вершиной правильной пирамиды, а многоугольник F — основанием этой пирамиды.

У правильной n-угольной пирамиды n плоскостей симметрии. Они проходят через вершину пирамиды и оси симметрии её основания (рис. 195). При отражении в такой плоскости вершина пирамиды остаётся на месте, а основание совмещается само с собой. Поэтому и пирамида совмещается сама с собой.

Многие архитектурные сооружения представляют собой сочетания правильных призм и пирамид (рис. 196).

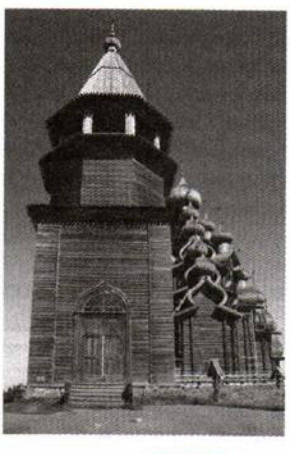
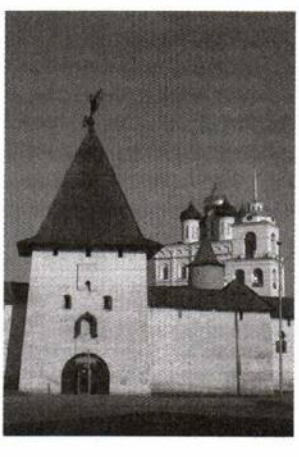




Рис. 196

Вопросы для самоконтроля

1 Какие вы знаете определения пирамиды?
2 Какие вы знаете виды пирамид?
3 Какие вы знаете свойства правильной пирамиды?

Задачи

22.1. Дополняем теорию | Докажите, что в правильной треугольной (четырёхугольной) пирамиде: а) проекция высоты на боковую грань лежит на апофеме пирамиды; б) угол между боковым ребром и плоскостью основания один и тот же для всех боковых рёбер; в) угол между боковой гранью и основанием один и тот же для всех боковых граней; г) все углы между соседними боковыми гранями равны. (***Апофема правильной пирамиды*** — это высота в боковой её грани, проведённая из вершины пирамиды.)

22.2. Дополняем теорию | а) Докажите, что вокруг правильной n-угольной пирамиды можно описать сферу (для $n=3$ и $n=4$). б) Докажите, что в правильную n-угольную пирамиду можно вписать сферу (для $n=3$ и $n=4$).

22.3. В правильной n-угольной пирамиде ($n=3$ и $n=4$) известны сторона основания и плоский угол при вершине. Как найти: а) высоту пирамиды; б) радиус описанной сферы; в) радиус вписанной сферы; г) угол между боковым ребром и плоскостью основания; д) угол между боковой гранью и основанием; е) угол между соседними боковыми гранями?

22.4. В правильной треугольной (четырёхугольной) пирамиде известны сторона основания и боковое ребро. Как найти: а) высоту пирамиды; б) угол между боковым ребром и основанием; в) угол между боковой гранью и основанием?

22.5. Сколько вершин, рёбер и граней имеет: а) n-угольная пирамида; б) n-угольная усечённая пирамида?

22.6. Нарисуйте проекцию правильной треугольной пирамиды на плоскость: а) основания; б) проходящую через боковое ребро и высоту.

22.7. В правильной треугольной пирамиде известны сторона основания и высота. Как вычислить площадь сечения, проходящего: а) параллельно основанию через середину высоты; б) через боковое ребро и высоту; в) через сторону основания перпендикулярно боковому ребру; г) через центр основания параллельно боковой грани; д) через середины четырёх рёбер?

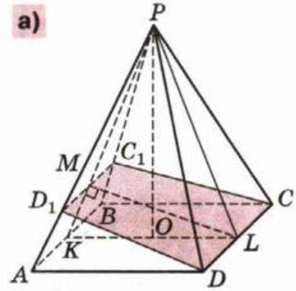
22.8. Нарисуйте проекцию правильной четырёхугольной пирамиды на плоскость: а) основания; б) проходящую через апофемы противоположных граней; в) боковой грани.

22.9. В правильной четырёхугольной пирамиде известны сторона основания и высота. Как вычислить площадь сечения, проходящего через: а) середину высоты параллельно основанию; б) диагональ основания перпендикулярно боковому ребру; в) диагональ основания параллельно боковому ребру; г) центр основания параллельно боковой грани; д) сторону основания перпендикулярно противоположной боковой грани?

Решение. д) Пусть $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания a и высотой $PO = h$ (рис. 197, *а*). Проведём через CD сечение, плоскость которого перпендикулярна грани PAB. Плоскость этого сечения содержит все перпендикуляры, опущенные из точек ребра CD на плоскость грани PAB (почему?). В частности, она содержит перпендикуляр LM, проведённый из середины L ребра CD на плоскость грани PAB. Он является высотой треугольника PKL, где точка K — середина ребра AB (почему?).

Рассмотрим основной случай, когда точка M лежит внутри высоты PK треугольника PAB. (Если $M = P$, то сечение — грань PCD, а если M вне PK, то сечение вырождается в отрезок CD.)

Если M лежит внутри PK, то в сечении получаем трапецию CDD_1C_1. Действительно, $C_1D_1 \parallel CD$ (поскольку $CD \parallel (PAB)$) и $C_1D_1 < CD$. Высотой этой трапеции является отрезок LM (почему?). Значит, её площадь S вычисляется так:



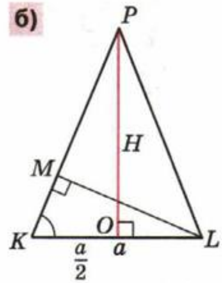


Рис. 197

$$S = \frac{1}{2}(CD + C_1D_1)\,LM. \qquad (1)$$

Найдём LM и C_1D_1. Поскольку $KL \cdot PO = LM \cdot PK$ (рис. 197, *б*), то

$$LM = \frac{KL \cdot PO}{PK} = \frac{aH}{PK}.$$

При этом $PK = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Далее, $C_1D_1 : AB = PM : PK$. Поэтому

$$C_1D_1 = a\,\frac{PM}{PK}.$$

Отрезок PM находим как разность $PM = PK - KM$. Используем подобие треугольников KML и KOP, находим KM из пропорции $\frac{KM}{KL} = \frac{KO}{PK}$, в которой $KL = a$, $KO = \frac{a}{2}$, а PK также известно. Подставьте найденные величины в равенство (1) и найдите формулу для площади S. Заметим, что точка M лежит внутри отрезка PK, если $\angle PKO > 45°$, т. е. когда $H > \frac{a}{2}$. ■

§ 23 Многогранники

23.1 **Тела и их поверхности.** ▲ Основной предмет геометрии в пространстве составляют геометрические тела, или, как говорят короче, тела, а также их поверхности. Изучая частные виды геометрических тел — пирамиду и призму, цилиндр и конус вращения, шар, мы до сих пор не дали общего определения тела. В этом пока не было необходимости, так как каждому из конкретных геометрических тел мы давали своё определение, чаще всего конструктивное, т. е. указывающее, как построить это тело (например, для пирамид и призм).

Сейчас мы определим, что в геометрии называют телом. Этим мы, во-первых, подытожим те наглядные представления о телах, которыми вы уже владеете. Во-вторых, понятие геометрического тела используется при определении многогранника и при изучении объёмов тел (в следующей главе).

Понятие о геометрическом теле даёт любое реальное физическое тело, и можно сказать, что *геометрическое тело* — это часть пространства, занимаемая физическим телом (рис. 198, *а*).

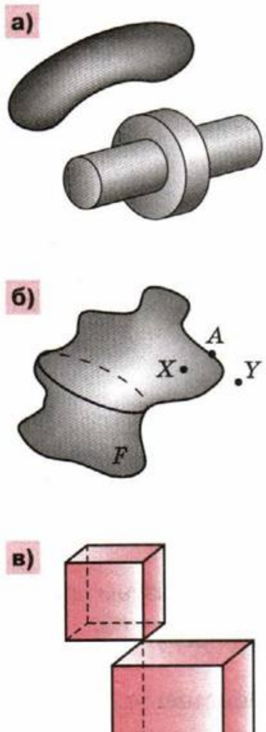


Рис. 198

Каждое тело мы представляем себе имеющим внутренние точки, отделённые от остального пространства поверхностью, или, как ещё говорят, границей тела. Так, внутренность шара отделена от остального пространства сферой, а внутренности цилиндра и конуса вращения — их (полными) поверхностями.

Граница (или **поверхность**) **тела** — это множество его граничных точек. При этом **точка** называется **граничной** для данной фигуры, если сколь угодно близко от неё есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей (например, точка A на фигуре F граничная, рис. 198, *б*).

Точка фигуры, не лежащая на её границе, называется **внутренней точкой** фигуры. Множество внутренних точек фигуры называется её **внутренностью.** Предполагается, что внутренность тела не распадается на отдельные куски, т. е. требуется, чтобы любую внутреннюю точку тела можно было соединить внутри тела с любой другой его внутренней точкой ломаной линией или отрезком. Поэтому фигура, состоящая из объединения двух шаров, не имеющих общих точек, телом не

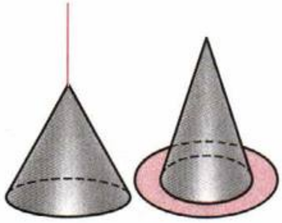


Рис. 199

считается. Точно так же фигура, состоящая из двух кубов, имеющих только одну общую точку (рис. 198, *в*), также телом не считается.

Наконец, каждое тело содержит всю свою границу, или, другими словами, поверхность. Шар без своей сферы или даже шар без одной её точки уже не тело. При этом поверхность тела сплошь прилегает к внутренности тела и не имеет никаких «отростков». Поэтому, например, конус со шпилем или конус с полями, как у шляпы, телом не считается (рис. 199).

Кроме того, полагают, что тело ограничено, т. е. умещается в некотором шаре. Суммируя всё сказанное, приходим к следующему. **Тело** — это ограниченная фигура в пространстве, обладающая такими свойствами: 1) у неё есть внутренние точки, причём любые две из них можно соединить ломаной или отрезком внутри фигуры; 2) фигура содержит свою границу, причём её граница сплошь прилегает к её внутренности.

а)

б)

в)

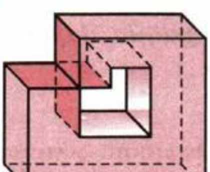


Рис. 200

23.2 **Определение многогранника. Элементы многогранника.** **Многогранником** называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников. Простейшие виды многогранников — призмы и пирамиды, но вообще многогранники могут иметь разнообразное и очень сложное строение. Примерами реальных тел, имеющих более или менее точную форму многогранников, могут служить кристаллы (рис. 200, *а*), строящиеся дома из кирпичей и бетонных блоков (рис. 200, *б*) или, скажем, стол и табуретка.

Многоугольник на поверхности многогранника называется его **гранью**, если, во-первых, внутренность многогранника прилегает лишь с одной стороны к этому многоугольнику. Во-вторых, он не содержится ни в каком другом многоугольнике, лежащем на поверхности многогранника (иначе он является лишь частью грани). Многоугольники, не удовлетворяющие первому условию, могут лежать на поверхности многогранника (рис. 200, *в*).

Кроме того, поскольку многогранники могут иметь кольцеобразные и даже более сложно устроенные грани, то мы должны расширить понятие многоугольника. А именно теперь под многоугольником мы понимаем многоугольную фигуру

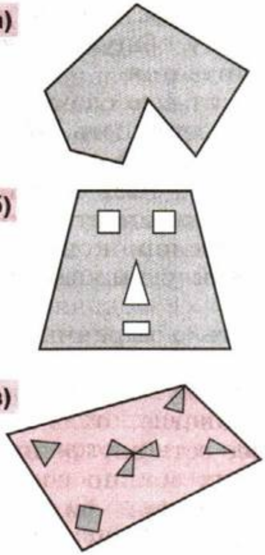


Рис. 201

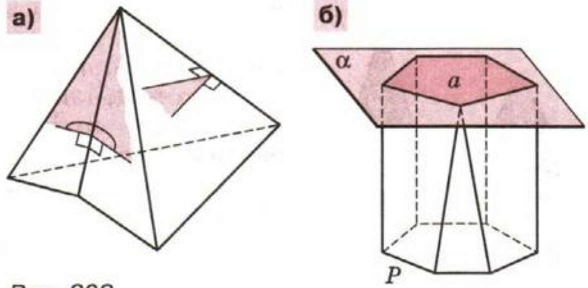


Рис. 202

плоскости, любые две внутренние точки которой можно соединить ломаной внутри этой фигуры (рис. 201, *а* — *в*). А многоугольной мы называем фигуру, являющуюся объединением конечного числа треугольников.

Стороны граней многогранника называются **рёбрами многогранника**, их вершины — **вершинами многогранника.**

Две грани многогранника, имеющие общее ребро, задают при этом ребре **двугранный угол многогранника** (рис. 202, *а*).

Рёбра многогранника, углы граней при вершинах, величины его двугранных углов — это *элементы многогранника.*

Многогранник называется **выпуклым,** если он лежит с одной стороны от плоскости любой своей грани, т. е. плоскость любой его грани является его опорной плоскостью (рис. 202, *б*).

Простейшими примерами выпуклых многогранников могут служить параллелепипеды, тетраэдры, правильные призмы, правильные пирамиды. Конечно, и призмы, и пирамиды могут и не быть выпуклыми, как, например, на рисунках 69, *а* и 202, *а*.

Леонард Эйлер

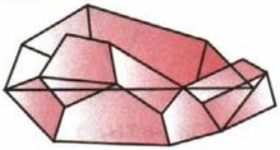
Выпуклые многогранники обладают многими замечательными свойствами. Вот одно из них — теорема Эйлера[1]: *для любого выпуклого многогранника сумма числа его вершин* В *и числа его граней* Г *без числа рёбер* Р *равна двум*, т. е.

$$В + Г - Р = 2. \ ▼$$

[1] Леонард Эйлер (1707—1783) — великий математик, физик, астроном, швейцарец по рождению, член Петербургской академии наук, работал в России в 1727—1741 и 1766—1783 гг.

23.3 **Многогранная поверхность и развёртка.** Наряду с многогранниками рассматривают также **многогранные поверхности** — фигуры, составленные из многоугольников, которые прикладываются друг к другу сторонами (рис. 203, *а*). Это можно сравнить с тем, как ломаная составляется из отрезков: одни отрезки прикладываются к другим концами (рис. 203, *б*). Но у отрезка только два конца, а сторон у многоугольников много. Поэтому когда многоугольник приложен к другому стороной, то остаётся не одна свободная сторона и возможностей приложить новые многоугольники много.

а)



б)

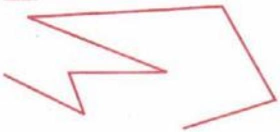


Рис. 203

К той стороне, где уже приложен многоугольник, прикладывать другие не разрешается, так что многоугольники встречаются по сторонам только попарно. Но могут оставаться и свободные стороны (например, у поверхности куба с вынутой гранью, как коробка без крышки, рис. 204). Если свободных сторон не остаётся, поверхность называется замкнутой (подразумевается, что многоугольников конечное число).

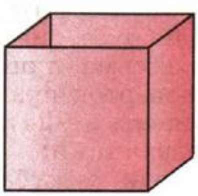


Рис. 204

Можно допускать, что многоугольники могут пересекаться, как могут пересекаться отрезки ломаной. Если этого не допускать, то замкнутая многогранная поверхность ограничивает многогранник. Но у произвольного многогранника граница может состоять из нескольких замкнутых многогранных поверхностей. Такой многогранник получается, когда из внутренности какого-либо многогранника удалены внутренности одного или нескольких многогранников, так что получаются многогранники с полостями внутри.

Нередко многогранные поверхности называют *многогранниками* (например, в Большой советской энциклопедии многогранники определяются как замкнутые многогранные поверхности). Это делают и в быту, когда склеивают из бумаги или картона кубики, коробки или другие многогранники. Понятно, из бумаги или картона склеивается не куб — тело, а куб — многогранная поверхность. Многогранники — многогранные поверхности — склеивают из развёрток.

Вообще **развёрткой** *многогранника* — многогранной поверхности — называется совокупность многоугольников, для которой указано, как их нужно склеивать — прикладывать друг к другу по сторонам. Конечно, склеиваемые стороны

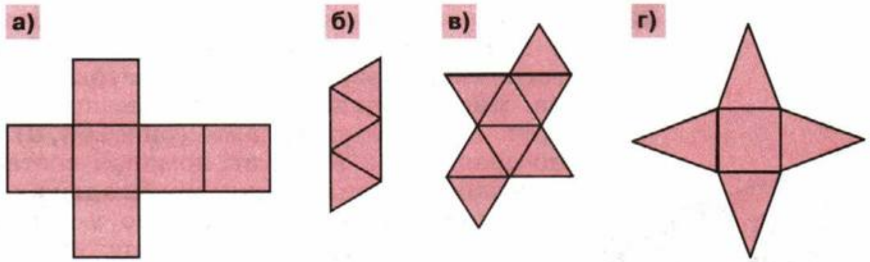


Рис. 205

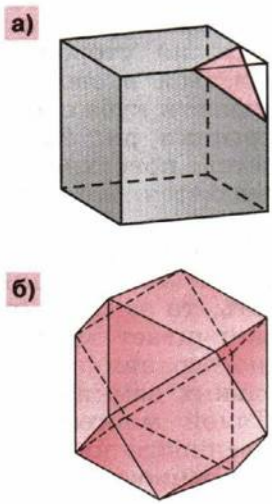


Рис. 206

должны быть равны и нужно указывать, какой конец одной стороны с каким концом другой стороны должен совпадать.

При составлении — склеивании многогранной поверхности многоугольники, составляющие развёртку, могут «переламываться».

Не исключается, что многоугольник склеивается сам с собой, как в известной крестообразной развёртке куба (рис. 205, здесь же приведены и другие примеры).

Реальное изготовление многогранников по их развёрткам — дело интересное и не всегда простое. Австралийский учитель математики М. Веннинджер посвятил ему целую книгу под названием «Модели многогранников» (М.: Мир, 1974). В ней приведены способы изготовления наиболее симметричных многогранников, порой весьма причудливых. Попробуйте склеить из развёрток правильные многогранники (они изображены в § 24), а также следующие красивые многогранники:

1. **Кубооктаэдр.** Он получится, если у куба «срезать» все его восемь вершин (рис. 206).

2. **Ромбокубооктаэдр.** Он получится, если на правильную восьмиугольную призму с квадрат-

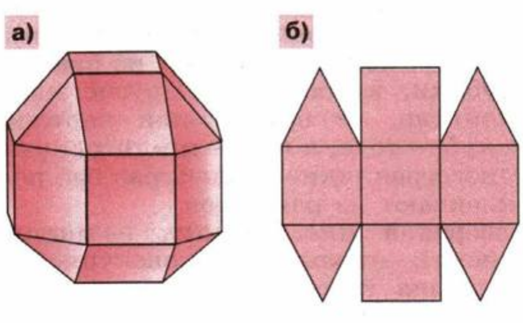


Рис. 207

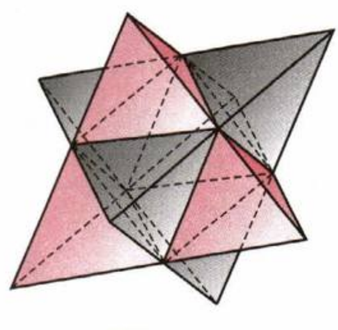


Рис. 208

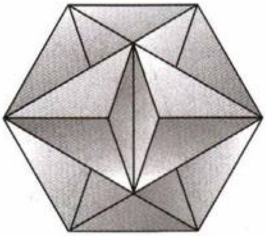


Рис. 209

ными боковыми гранями поставить две «крышки», склеенные из пяти квадратов и четырёх правильных треугольников (рис. 207).

Кубооктаэдр и ромбокубооктаэдр — два из тринадцати архимедовых полуправильных многогранников.

3. **Звёздчатый октаэдр Кеплера.** Его можно получить как объединение двух правильных тетраэдров (рис. 208).

4. **Большой додекаэдр** (рис. 209). Его поверхность состоит из двадцати боковых поверхностей правильных треугольных пирамид с боковыми гранями, имеющими углы $36°$, $36°$ и $108°$.

23.4 Многогранные углы.

Многогранный угол можно получить, продолжая рёбра и грани, идущие из одной вершины какого-либо многогранника, например из вершины пирамиды (рис. 210). Многогранные углы составляются из обычных углов (такие углы мы будем теперь называть плоскими углами), подобно тому как замкнутая ломаная составляется из отрезков. А именно даётся следующее определение:

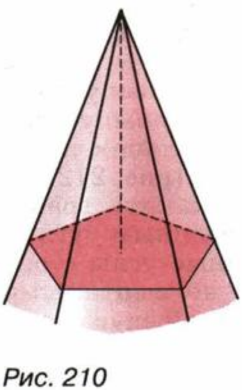


Рис. 210

Многогранным углом называется фигура, образованная плоскими углами так, что выполняются условия:

1) никакие два угла не имеют общих точек, кроме их общей вершины или целой стороны;

2) у каждого из этих углов каждая его сторона является общей с одним и только одним другим таким углом;

3) от каждого угла к каждому можно перейти по углам, имеющим общие стороны;

4) никакие два угла с общей стороной не лежат в одной плоскости.

Плоские углы, образующие многогранный угол, называются его **гранями**, а их стороны — его **рёбрами.** Элементами многогранного угла являются величины его плоских углов — граней, а также величины двугранных углов при его рёбрах между гранями, прилегающими к этим рёбрам.

Многогранные углы называются **равными,** если равны друг другу все их соответственные элементы.

Под данное определение многогранного угла подходит и двугранный угол. Он составлен из

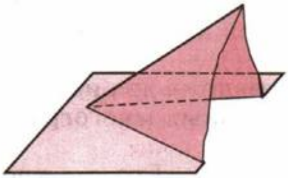


Рис. 211

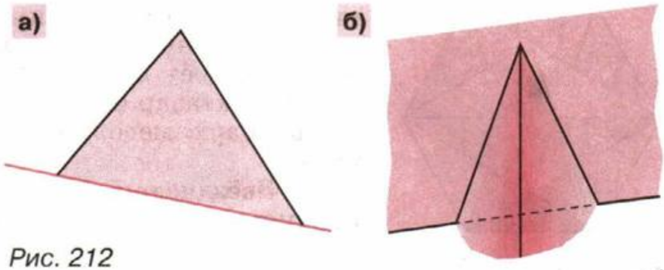


Рис. 212

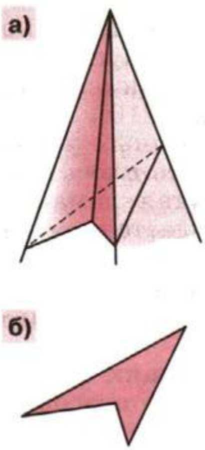


Рис. 213

двух развёрнутых плоских углов. Вершиной такого угла может считаться любая точка на его ребре, и эта точка разбивает ребро на два ребра, сходящиеся в вершине. Но ввиду этой неопределённости в положении вершины двугранный угол исключается из числа многогранных углов.

Рассмотрите многогранные углы у разных многогранников. Обратите внимание, что грани многогранных углов могут быть и не выпуклыми (рис. 211).

Многогранный угол называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Ясно, что многогранные углы при вершинах выпуклых многогранников выпуклые. Грани выпуклых многогранных углов выпуклы.

Подобно тому как каждый треугольник является выпуклым многоугольником (рис. 212, *а*), любой трёхгранный угол с выпуклыми гранями является выпуклым многогранным углом (рис. 212, *б*). Но уже четырёхгранные углы с выпуклыми гранями могут быть и не выпуклыми (рис. 213, *а*), подобно тому как четырёхугольники могут быть и не выпуклыми (рис. 213, *б*).

Выпуклый многогранный угол называется **правильным**, если равны друг другу все плоские углы его граней и равны друг другу все двугранные углы при его рёбрах.

Очевидно, правильным многогранным углом является угол при вершине правильной пирамиды.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется многогранником?
2. Назовите элементы многогранника.
3. Какие многогранники называют выпуклыми?
4. В чём состоит теорема Эйлера для выпуклого многогранника?

Задачи

23.1. Нарисуйте многогранник, у которого сечениями могут быть: а) квадрат, прямоугольник, правильный шестиугольник; б) равносторонний треугольник, квадрат, трапеция; в) ромб, равнобедренный треугольник, прямоугольник; г) объединение двух треугольников без общих точек.

23.2. Вращаясь вокруг одного из рёбер многогранника, плоскость даёт такие сечения: а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм; г) равнобедренную трапецию. Нарисуйте такой многогранник.

23.3. Нарисуйте многогранник: а) все грани которого — треугольники, но не тетраэдр; б) все грани которого — квадраты, но не куб; в) все грани которого — неравные четырёхугольники; г) все грани которого — пятиугольники; д) четыре грани которого — правильные треугольники, а ещё четыре — правильные шестиугольники.

23.4. Нарисуйте разные многогранники, которые могут получиться в пересечении пяти полупространств; шести полупространств.

23.5. На рисунке 214 изображены проекции на три попарно ортогональные плоскости некоторых частей куба. Какими многогранниками являются эти части? Опишите эти многогранники. Сделайте рисунки.

23.6. Многогранник M_1 называется вписанным в многогранник M_2, если каждая вершина M_1 лежит на поверхности M_2. Нарисуйте тетраэдр $PABC$ и вписанный в него многогранник M_1, такой, что: а) на каждом ребре тетраэдра лежит ровно одна вершина M_1; б) на каждой грани тетраэдра лежит ровно одна вершина M_1; в) на каждой грани тетраэдра лежат ровно две вершины M_1. Решите аналогичные задачи для куба. Кроме того, нарисуйте разные многогранники, вписанные в куб, вершины которых находятся в вершинах куба.

23.7. Нарисуйте разные развёртки правильного тетраэдра. При получении многогранника из развёртки некоторые стороны развёртки склеиваются,

Рис. 214

в результате чего получается шов. Из некоторых соображений целесообразно общую длину швов уменьшить. Выберите из нарисованных развёрток ту, у которой общая длина швов наименьшая.

23.8. Нарисуйте многогранник, развёртка которого имеет такой вид, как на рисунке 215.

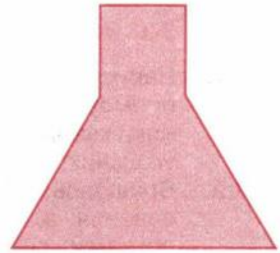


Рис. 215

23.9. Приведите пример многогранника, около которого: а) можно описать сферу; б) нельзя описать сферу.

23.10. Приведите пример многогранника, в который: а) можно вписать сферу; б) нельзя вписать сферу.

23.11. Является ли многоугольником пересечение двух любых многоугольников? Ответьте на аналогичный вопрос для многогранников.

23.12. Многоугольник разделили прямой на две части. Будут ли полученные части многоугольниками? Ответьте на аналогичный вопрос для многогранников.

23.13. Исследуем | Трёхгранные углы с выпуклыми гранями являются стереометрическими аналогами плоских треугольников. а) Сформулируйте и докажите теоремы о равенстве трёхгранных углов. б) Что является для трёхгранных углов аналогами биссектрис, медиан и высот треугольников? Сформулируйте и докажите для трёхгранных углов теоремы, аналогичные теоремам о замечательных точках треугольников.

§ 24 Правильные и полуправильные многогранники. Симметрия фигур

24.1 **Правильные многогранники.** **Правильным** называется **многогранник**, у которого все элементы одного и того же вида равны, т. е. равны все рёбра, углы граней и двугранные углы.

Грани правильного многогранника — правильные многоугольники, так как у них все стороны (рёбра) равны и углы равны. По этой же причине все его грани равны между собой.

Ещё в Древней Греции было известно, что правильных многогранников существует всего пять видов. Два из них вы хорошо знаете — правильный тетраэдр и куб. Перечислим остальные три вида.

Восьмигранник — многогранник, у которого грани — правильные треугольники, сходящиеся по четыре в каждой вершине. Он называется **правильным октаэдром** или просто **октаэдром**, что и означает в переводе с греческого «восьмигранник» (рис. 216, *а*).

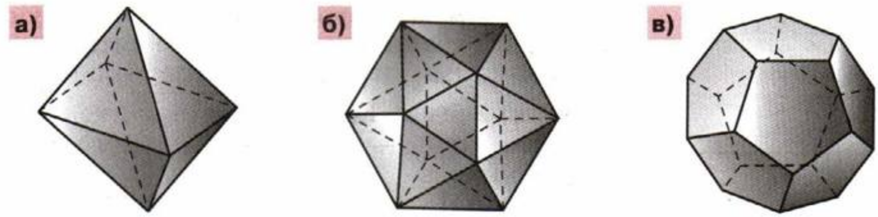


Рис. 216

Двадцатигранник — многогранник, у которого все грани — правильные треугольники, сходящиеся по пять в каждой вершине. Он называется **икосаэдром**, что и означает в переводе с греческого «двадцатигранник» (рис. 216, *б*).

Двенадцатигранник — многогранник, у которого все грани — правильные пятиугольники, сходящиеся по три в каждой вершине. Он называется **додекаэдром**, что и означает в переводе с греческого «двенадцатигранник» (рис. 216, *в*).

24.2 **Построение правильных многогранников*.** Как построить куб и правильный тетраэдр, вам известно.

Для построения *октаэдра* строим сначала четырёхугольную пирамиду, боковые грани которой будут правильными треугольниками (рис. 217, *а*). Октаэдр составляется из двух таких пирамид, сложенных основаниями (рис. 217, *б*).

Икосаэдр можно построить так. Возьмём в одной плоскости два правильных пятиугольника со стороной a с общим центром, повёрнутые один относительно другого на $36°$ (рис. 218, *а*). Расстояние d между их соседними вершинами равно $a\dfrac{\sin 18°}{\sin 36°}$, или $\dfrac{a}{2\sin 72°}$. Раздвинем параллельно плоскости этих пятиугольников на расстояние h так, чтобы центры пятиугольников соединял общий перпендикуляр их плоскостей. Соединим последовательно их вершины (рис. 218, *б*).

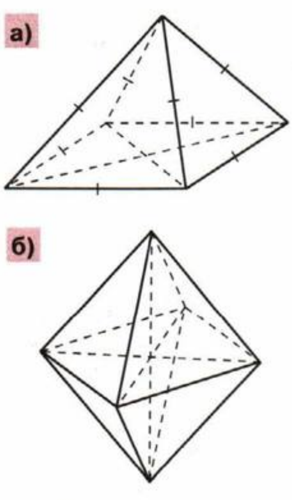


Рис. 217

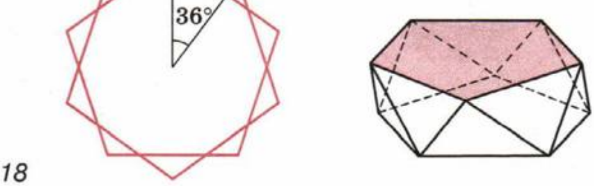


Рис. 218

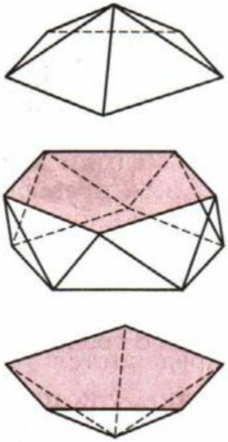


Рис. 219

Получим многогранник (пятиугольную антипризму), ограниченный двумя пятиугольными основаниями и десятью треугольными боковыми гранями. Если $h = \sqrt{a^2 - d^2}$, то боковые грани антипризмы — правильные треугольники со стороной a.

Чтобы достроить его до икосаэдра, на его основаниях строят две правильные пятиугольные пирамиды, боковые грани которых — правильные треугольники (рис. 219). Икосаэдр составлен из этой пятиугольной антипризмы и этих двух пирамид.

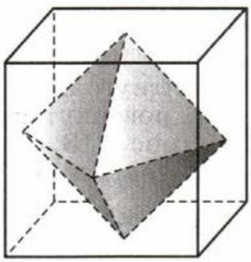
Чтобы построить *додекаэдр*, воспользуемся следующим свойством правильных многогранников.

Центры граней любого правильного многогранника P являются вершинами другого правильного многогранника P'. Рёбра многогранника P' соединяют центры соседних граней многогранника P.

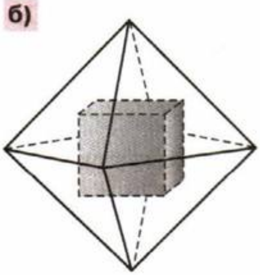
Так, соединяя центры соседних граней куба, получаем рёбра октаэдра (рис. 220, *а*). Если же соединить центры соседних граней октаэдра, то получим рёбра куба (рис. 220, *б*). Говорят, что куб и октаэдр **двойственны** друг другу: граням одного соответствуют вершины другого, и обратно.

Додекаэдр и икосаэдр тоже двойственны друг другу. Поэтому, соединяя отрезками центры соседних граней икосаэдра, получим рёбра додекаэдра (рис. 220, *в*). Верно и обратное (рис. 220, *г*). Правильный тетраэдр двойствен сам себе. ▼

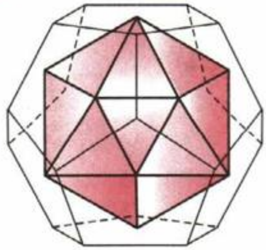
а)



б)



в)



г)

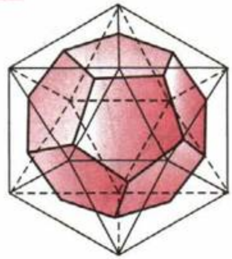


Рис. 220

24.3 **Преобразования симметрии.** **Центральной симметрией** фигуры с центром O называется такое преобразование этой фигуры, которое сопоставляет каждой её точке точку, симметричную относительно O (рис. 221, *а*).

Отражением фигуры в плоскости α (или **зеркальной симметрией**) называется такое преобразование, при котором каждой точке данной фигуры сопоставляется точка, симметричная ей относительно плоскости α (рис. 221, *б*). (Отражение в плоскости называется также симметрией относительно этой плоскости.)

Наконец, **осевая симметрия** определяется так же, как на плоскости (рис. 221, *в*).

Все эти *преобразования являются* ***движениями***, т. е. сохраняют расстояния. То, что *центральная симметрия является движением*, доказывается так же, как в планиметрии (рис. 222, *а*).

Покажем, что *зеркальная симметрия является движением.*

□ Действительно, пусть точки A', B' симметричны точкам A, B относительно плоскости α. Отрезки AA', BB' перпендикулярны α, а потому параллельны. Следовательно, они лежат в одной плоскости β (рис. 222, *б*). По признаку перпендикулярности плоскостей плоскости α и β перпендикулярны. Они пересекаются по некоторой прямой a. Точки A и A', а также B и B' симметричны в плоскости β относительно прямой a, так как отрезки AA' и BB' перпендикулярны прямой a и делятся ею пополам.

В планиметрии же было доказано, что симметрия в плоскости относительно прямой является

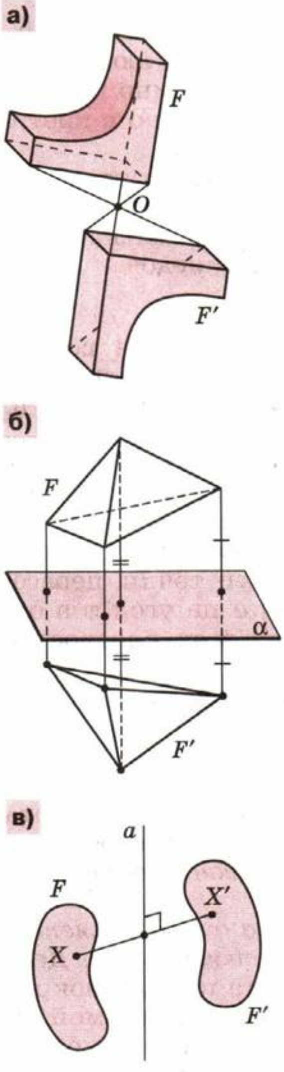


Рис. 221

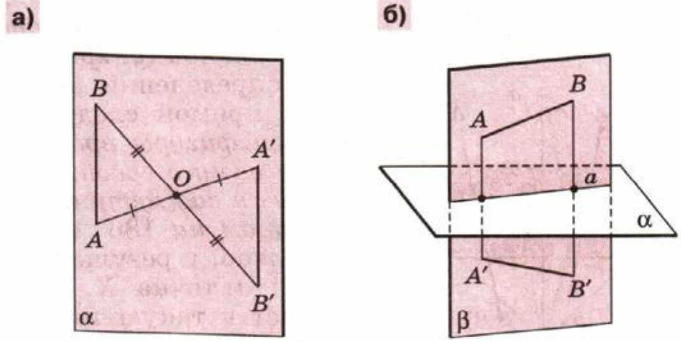
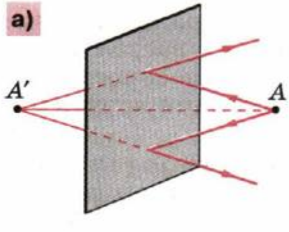


Рис. 222

а)



б)

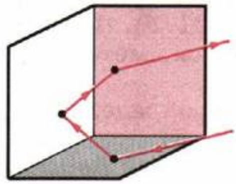


Рис. 223

движением, т. е. сохраняет расстояния. Поэтому $A'B' = AB$, т. е. отражение в плоскости — движение. ■

Отражение в плоскости осуществляется реально при отражении в зеркале: изображение предмета в плоском зеркале соответствует предмету именно так, как при геометрическом отражении в плоскости зеркала. Это следует из закона отражения света (рис. 223, *а*).

Отражение в плоскости имеет различные технические применения. Например, луч любого направления, отразившись от трёх взаимно перпендикулярных зеркал, возвращается точно в противоположном направлении (рис. 223, *б*).

На этом основан уголковый отражатель, отправленный в своё время на Луну. Из систем таких отражателей состоят красные сигнальные знаки сзади у автомашин и велосипедов.

24.4 Поворот.

Поворот. Примеров реальных поворотов вокруг прямой очень много: поворот двери, колеса вокруг оси, пропеллера, во́рота колодца и т. п. (рис. 224, *а*).

а)

В геометрии же **поворотом фигуры вокруг прямой** a **на угол** φ называется преобразование, которое осуществляется так: в каждой плоскости, перпендикулярной прямой a и пересекающей фигуру, происходит поворот вокруг точки пересечения этой плоскости с прямой a на угол φ в одном и том же направлении для всех плоскостей (рис. 224, *б*).

Прямая a называется **осью поворота**, угол φ — **углом поворота**. *Поворот задаётся осью, углом и направлением поворота в какой-либо плоскости, перпендикулярной оси.*

б)

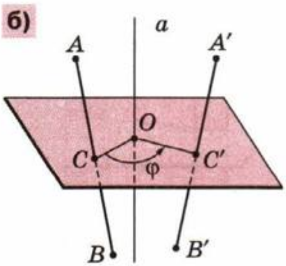


Рис. 224

Из определений фигуры вращения и поворота вокруг прямой следует, что *любой поворот вокруг оси фигуры вращения самосовмещает эту фигуру саму с собой.*

Осевая симметрия в пространстве является поворотом на 180° *вокруг оси симметрии.* Действительно, в результате поворота на 180° вокруг прямой a точка X, не лежащая на прямой a, перейдёт в такую точку X', что прямая a будет перпендикулярна отрезку XX' и пересечёт его в середине.

Теорема 27 *(о повороте).* **Поворот вокруг прямой является движением.**

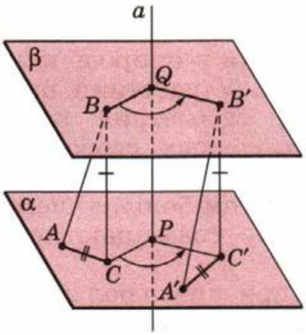


Рис. 225

Доказательство*. Пусть при повороте вокруг оси a точки A и B перешли в точки A' и B'. Докажем, что $A'B' = AB$.

Если точки A и B лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси, то $A'B' = AB$, так как поворот в плоскости является движением.

Допустим, что точка A лежит в плоскости $\alpha \perp a$, а точка B — в другой плоскости $\beta \perp a$ (рис. 225). Пусть P — точка пересечения прямой a и плоскости α, а Q — точка пересечения плоскости β и прямой a. Опустим из точек B и B' перпендикуляры BC и $B'C'$ на плоскость α. Так как $\alpha \parallel \beta$ ($\alpha \perp a$ и $\beta \perp a$), то $B'C' = BC$ (см. п. 14.2). Так как $\angle CPC'$ и $\angle BQB'$ — линейные углы одного и того же двугранного угла, то $\angle CPC' = \angle BQB' = \varphi$. Кроме того, $C'P = CP$, так как $C'P = B'Q$, $CP = BQ$ и $B'Q = BQ$. Поэтому при рассматриваемом повороте точка C переходит в точку C'. Так как точки A, C, A', C' лежат в плоскости α, то $A'C' = AC$.

Наконец, мы замечаем ещё, что поскольку $BC \perp \alpha$ и $B'C' \perp \alpha$, то $BC \perp CA$ и $B'C' \perp C'A'$. Поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ прямоугольные. Они равны, так как $B'C' = BC$ и $A'C' = AC$.

Следовательно, $A'B' = AB$. ■

24.5

Общее понятие о симметрии. Симметрией фигуры вообще называется свойство фигуры, состоящее в том, что существует движение, совмещающее её саму с собой.

Мы уже говорили о симметрии шара. Любой параллелепипед обладает симметрией: у него есть центр симметрии. Симметрией обладают фигуры вращения, правильные пирамиды и призмы.

Симметрия играет огромную роль в искусстве, архитектуре, где она постоянно встречается в достаточно точном геометрическом смысле — как совмещаемость частей при самосовмещении целого (рис. 226, *а*, *б*).

Учение о симметрии составляет важную и достаточно обширную часть геометрии, особенно учение о симметрии кристаллов, которое включается

а)

б)

Рис. 226

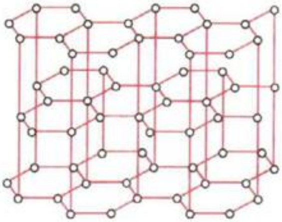


Рис. 227

Рис. 228

в науку, называемую геометрической кристаллографией.

Известно, что атомы в кристаллах образуют кристаллическую решётку, т. е. некую правильную систему фигур, совмещающихся одна с другой движениями (рис. 227).

Помимо кристаллов, симметрия в природе наблюдается у живых организмов. У растений наблюдается симметрия цветов, симметрия расположения листьев. Среди животных особенно примечательны в этом смысле морские звёзды (рис. 228). Симметрии у фигуры тем больше, чем больше есть движений, которые совмещают её саму с собой.

Общее учение о симметрии приобрело большое значение в физике, с ним связаны основные законы природы.

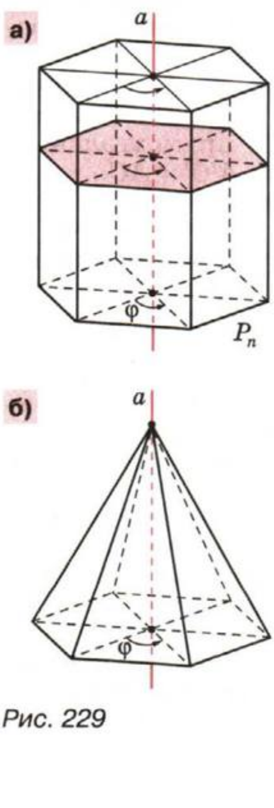


Рис. 229

24.6 **Элементы симметрии.** Если некоторое преобразование симметрии совмещает фигуру саму с собой, то, повторив это преобразование, мы снова совместим фигуру саму с собой, т. е. опять получим преобразование симметрии. Например, совместив фигуру саму с собой поворотом, можно этот поворот повторить.

Если фигура самосовмещается в результате поворота вокруг оси, то эта ось называется её **осью поворотной симметрии**. Число поворотов вокруг оси, которыми фигура самосовмещается, называется порядком оси.

Так, ось правильной n-угольной призмы является её осью поворотной симметрии порядка n (рис. 229, *а*). Аналогично **осью поворотной симметрии порядка n** является высота правильной n-угольной пирамиды (рис. 229, *б*).

У фигур вращения ось поворотной симметрии бесконечного порядка.

Если фигура совмещается сама с собой в результате последовательно выполненных поворотов вокруг некоторой прямой a и затем отражения в некоторой плоскости α, перпендикулярной прямой a, то говорят, что a является **осью зеркальной симметрии** данной фигуры (или, короче, **зеркальной осью**). Так же как для оси симметрии, для зеркальной оси определяется её порядок. Например, у октаэдра есть зеркальная ось

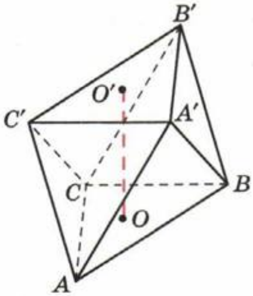


Рис. 230

порядка шесть — она проходит через центры его параллельных граней (рис. 230).

Движение, которое получается в результате последовательно выполненных поворотов вокруг прямой и отражения в плоскости, перпендикулярной этой прямой, называется **зеркальным поворотом.**

Оба вида осей поворота вместе с плоскостями симметрии и центром симметрии, если они есть у фигуры, называются её *элементами симметрии*.

Центральная симметрия является частным случаем зеркального поворота (на 180°).

24.7 Симметрии правильных многогранников.

Правильные многогранники — самые симметричные из всех многогранников.

Укажем элементы симметрии куба.

1. Центр симметрии — центр куба, т. е. точка пересечения его диагоналей.

2. Плоскости симметрии:

а) три плоскости симметрии, перпендикулярные рёбрам в их серединах (рис. 231, *а*);

б) шесть плоскостей симметрии, проходящих через противоположные рёбра куба (рис. 231, *б*).

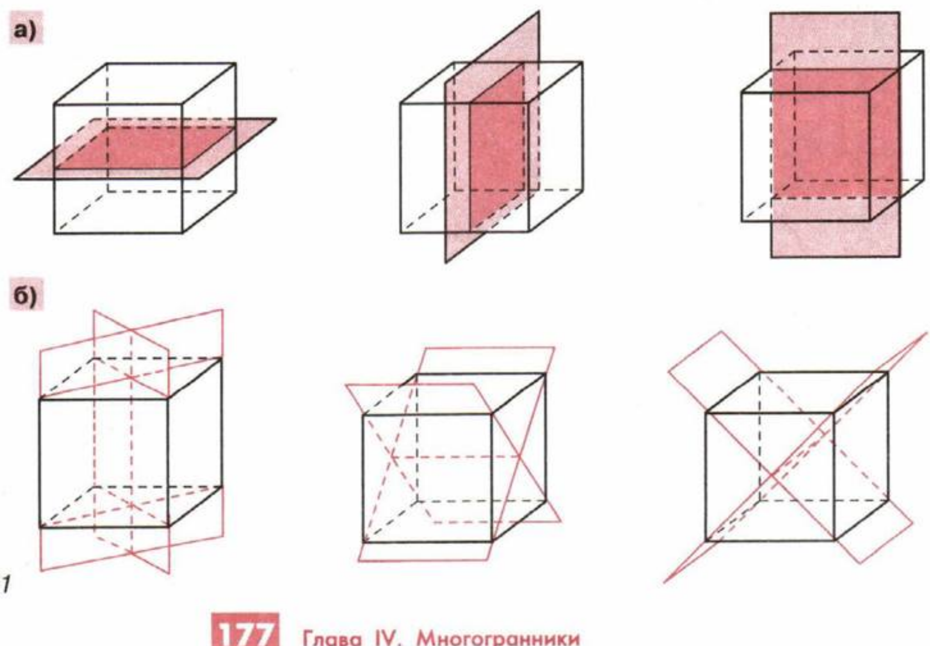


Рис. 231

3. Оси симметрии: а) три оси 4-го порядка, проходящие через центры противоположных граней куба (рис. 232, *а*); б) шесть осей 2-го порядка, проходящих через середины противоположных рёбер (рис. 232, *б*); в) четыре зеркальные оси 6-го порядка, проходящие через противоположные вершины (рис. 232, *в*).

Этот элемент симметрии куба самый интересный и не сразу видный. Чтобы прояснить его, проведём сечение куба плоскостью, проходящей через центр перпендикулярно диагонали. Оно является правильным шестиугольником. При повороте куба вокруг диагонали на угол 60° шестиугольник самосовмещается, а после отражения в плоскости шестиугольника самосовмещается и куб.

Октаэдр — многогранник, двойственный кубу, и у него те же элементы симметрии, что и у куба.

Но есть и разница: плоскости симметрии, проходящие у куба через вершины, у октаэдра проходят через центры граней (рис. 232, *г*), а плоскости симметрии, проходящие у куба через центры граней, у октаэдра проходят через вершины (рис. 232, *д*). Такая же разница и в положениях осей (рис. 232, *е*).

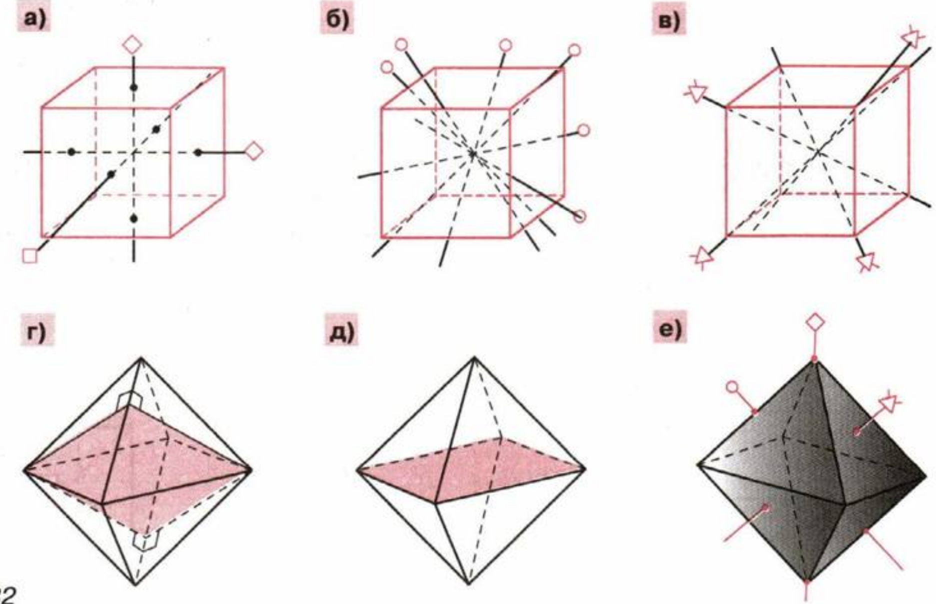


Рис. 232

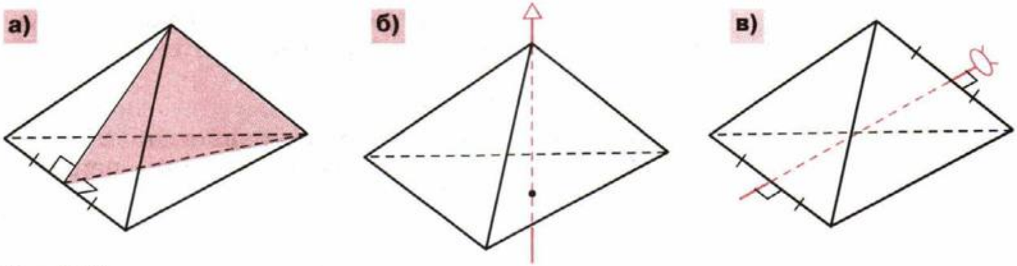


Рис. 233

Рассмотрим *элементы симметрии правильного тетраэдра*.

1. Шесть плоскостей симметрии, каждая проходит через ребро и середину противоположного ребра (рис. 233, *а*).

2. Четыре оси 3-го порядка — высоты тетраэдра (рис. 233, *б*).

3. Три зеркальные оси 4-го порядка, проходящие через середины противоположных рёбер (рис. 233, *в*).

Попытайтесь сами обнаружить элементы симметрии додекаэдра и икосаэдра, используя то соображение, что они двойственны. ▼

24.8 **Золотое сечение.** Построением правильных многогранников завершал свои «Начала» Евклид: «Итак, кроме упомянутых пяти тел нельзя построить другой телесной фигуры, заключённой между равносторонними и равноугольными фигурами, что и требовалось доказать». И в этих построениях Евклид использовал **деление отрезка в крайнем и среднем отношении**, т. е. деление отрезка a на два отрезка x и $a - x$, при котором отношение всего отрезка a к его большей части x было равно отношению большей части x к меньшей части $a - x$:

$$a : x = x : (a - x). \qquad (1)$$

Уже в эпоху Возрождения Леонардо да Винчи такое сечение отрезка назвал **золотым сечением,** а пропорцию (1) **золотой пропорцией.** Отношение $a : x$ в равенстве (1) обозначают буквой Ф в честь знаменитого греческого скульптора Фидия — одного из строителей Парфенона. Золотое сечение, а также его степени присутствуют в соотношении размеров самых знаменитых архитектурных строений (см. форзац). Прочитать об этом можно

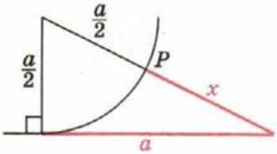


Рис. 234

в книге А. В. Волошинова «Математика и искусство» (М.: Просвещение, 2000). Вычислим Ф, а также число $\varphi = \frac{1}{\Phi}$.

Приведя равенство (1) к уравнению $x^2 + ax - a^2 = 0$, найдём его положительное решение $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Следовательно, $\varphi = x : a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ и $\Phi = a : x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \approx 1{,}618$.

Как циркулем и линейкой построить отрезок x, если задан отрезок a, ясно из рисунка 234. Зная, как циркулем и линейкой разделить отрезок в крайнем и среднем отношении, можно построить этими инструментами правильный пятиугольник. Покажем, как это сделать.

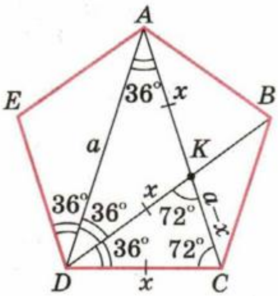


Рис. 235

Рассмотрим правильный пятиугольник $ABCDE$ и проведём в нём диагонали AC, AD и BD (рис. 235). Точка пересечения диагоналей AC и BD — точка K — делит отрезок AC в крайнем и среднем отношении (это следует из подобия треугольников ACD и CDK). Задав диагональ $AC = a$, находим сторону x пятиугольника $ABCDE$ и составляем его из треугольников ACD, ABC и ADE.

Напомним, что не любая задача на построение решается циркулем и линейкой. Нельзя этими инструментами построить правильный семиугольник, решить задачи о трисекции угла, об удвоении куба, о квадратуре круга.

Знаменитый математик и астроном Иоганн Кеплер (1571—1630) говорил: «Геометрия владеет двумя сокровищами: одна из них — это теорема Пифагора, а другая — деление отрезка в крайнем и среднем отношении... Первое из них можно сравнить с мерой золота, второе же больше напоминает драгоценный камень».

24.9 **Полуправильные многогранники.** У правильного многогранника должны быть правильными и равными друг другу и грани, и многогранные углы. Если ослабить одно из этих условий, то получим два класса **полуправильных многогранников.** Расскажем об одном из них — о классе **равноугольных полуправильных многогранников.** Он состоит из многогранников, у которых, во-первых, все грани являются правильными многоугольниками (но не обязательно равными друг

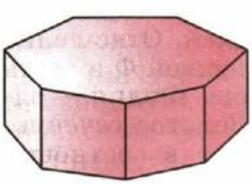


Рис. 236

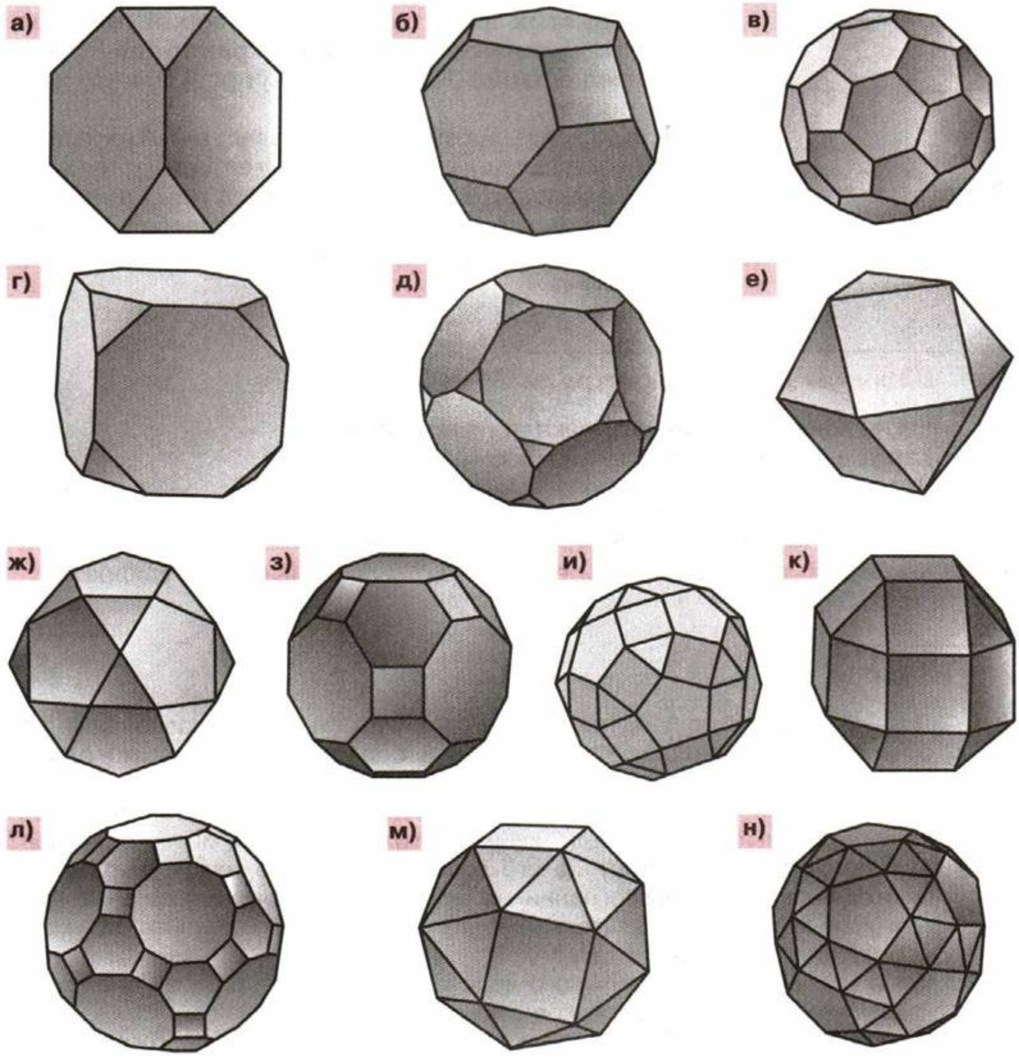


Рис. 237

другу) и, во-вторых, многогранные углы при всех вершинах равны.

Этот класс содержит все правильные призмы, боковые грани которых квадраты (рис. 236). Ещё этот класс содержит **правильные антипризмы,** у которых основания — правильные n-угольники, а боковые грани — правильные треугольники. Для $n = 5$ такая антипризма была построена в п. 24.2 (см. рис. 218, *а*, *б*).

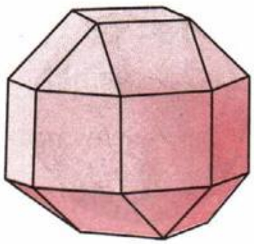


Рис. 238

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных равноугольных многогранников, существуют ещё лишь 14 видов полуправильных многогранников.

Тринадцать из них были известны Архимеду, и их называют **архимедовыми телами** (рис. 237). Четырнадцатый многогранник был найден в середине XX века (рис. 238). Он отличается от архимедова многогранника, изображённого на рисунке 237, *к*.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие многогранники называются правильными?
2. Какие вы знаете правильные многогранники?
3. Что такое двойственные правильные многогранники?
4. В чём состоит свойство симметричности фигуры?
5. Какие вы знаете элементы симметрии фигуры?
6. Какие элементы симметрии есть у куба? у правильного тетраэдра?

Задачи

24.1. Докажите, что в правильном многограннике есть точка, равноудалённая от всех его: а) вершин; б) граней; в) рёбер. Докажите, что это одна и та же точка. Её называют *центром правильного многогранника*.

24.2. Исследуем | Какие правильные многоугольники можно получить в сечении правильного тетраэдра? куба? других правильных многогранников?

24.3. а) Нарисуйте куб. Найдите на его поверхности такие точки, которые являются вершинами многогранников, все грани которых правильные многоугольники, но не обязательно одного вида. б) Проделайте такую же работу для правильного тетраэдра и октаэдра.

24.4. Как в каждой грани правильного додекаэдра провести одну её диагональ, чтобы эти двенадцать отрезков стали бы рёбрами куба?

24.5. Сравните число вершин, рёбер и граней у двойственных многогранников.

24.6. Как найти двугранные углы правильного многогранника?

24.7. Как построить правильный пятиугольник по его стороне?

24.8. Как построить правильный десятиугольник по его стороне?

24.9. Нарисуйте пятиконечную звезду из диагоналей правильного пятиугольника (пентаграмму). Выразите длины всех отрезков на этом рисунке через величины Φ и φ, полагая, что сторона исходного пятиугольника равна 1.

24.10. Какие из архимедовых тел можно получить, срезая плоскостями вершины правильных многогранников?

24.11. Используя теорему Эйлера, подсчитайте число вершин, рёбер и граней у архимедовых многогранников.

Задачи к главе IV

IV.1. Найдите двугранные углы правильных многогранников.

IV.2. Вычислите радиусы описанной и вписанной сфер правильных многогранников с ребром 1.

IV.3. Сколькими различными способами можно совместить движением правильный многогранник сам с собой?

IV.4. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, $|AB| = |BC| = |BB_1| = 1$, $\angle ABC = 90°$.

1) Нарисуйте её плоскости симметрии.

2) Установите форму её сечения плоскостью: а) перпендикулярной (AB); б) параллельной (AA_1C_1); в) параллельной плоскости симметрии, проходящей через BB_1; г) проходящей через (A_1C_1).

3) Вычислите расстояния: а) $|B_1K|$, где K — середина AC; б) от C до (AA_1B_1); в) от B_1 до (A_1BC_1); г) от (BB_1) до грани AA_1C_1C.

4) Найдите угол φ между: а) (A_1B) и (ABC); б) (AC) и (BB_1C_1); в) (B_1C) и (A_1BB_1); г) (AB_1C) и (ABC); д) (AB_1C_1) и (ABC); е) (AB_1C_1) и (CB_1A_1).

5) Какова площадь сечения, составляющего с основанием угол 60°, проходящего через AC?

6) В каких границах лежат площади сечений, рассмотренных в п. 2 (а, б, в)?

7) Можно ли описать вокруг этой призмы сферу? вписать в неё сферу? Если можно, то каков её радиус?

IV.5. Дан тетраэдр $PABC$, $|BA| = |BC| = |BP| = 1$, $(BP) \perp (ABC)$, $(AB) \perp (BC)$.

1) Нарисуйте его плоскости симметрии.

2) Установите форму сечения плоскостью, проходящей: а) через (AB); б) через (AC); в) параллельно (PAC); г) через B параллельно (AC).

3) Вычислите расстояния: а) от C до (PAB); б) от B до (PAC); в)* между (PB) и (AC).

4) Вычислите углы между: а) (PC) и плоскостями граней; б) (PC) и (AB); в) (APC) и плоскостями граней; г)* двумя плоскостями симметрии.

5) Найдите площадь сечения, проходящего через (PA) под углом φ к (PAB).

6) В каких границах лежат площади сечений, рассмотренных в задаче из п. 2 (а, б, в)?

7)* а) Вычислите радиус сферы, описанной около тетраэдра. б) Вычислите радиус сферы, вписанной в тетраэдр.

IV.6. В пирамиде $PABCD$ основание $ABCD$ — квадрат со стороной 1, точка P проектируется в точку B, $PB = 1$.

1) Нарисуйте плоскость симметрии пирамиды.

2) Установите форму сечения пирамиды плоскостью, проходящей: а) через PB; б) через AD; в) перпендикулярно PB; г) параллельно (PAB).

3) Вычислите расстояния: а) $|PD|$; б) $|P(AC)|$; в) $|B(PAD)|$; г)* $|D(PAC)|$; д)* $|A(PCD)|$.

4) Вычислите углы: а) между боковыми рёбрами и основанием; б) между боковыми гранями и основанием; в) между боковыми гранями; г) между (PA) и (CD); д) между (PD) и (AC).

5) Вычислите площадь сечения, проходящего через AC под углом φ к основанию и пересекающего PB.

6) Можно ли описать вокруг пирамиды сферу? А вписать? Если да, то каков её радиус?

IV.7. В пирамиде $PABCD$ основание $ABCD$ — прямоугольник, точка P проектируется в его центр Q, $PQ = QC = 1$, $\angle CQD = 60°$.

1) Нарисуйте плоскости симметрии пирамиды.

2) Установите форму сечения пирамиды плоскостью, проходящей: а) перпендикулярно PQ; б) через AC; в) через AD; г) перпендикулярно BD; д) параллельно PQ и CD.

3) Вычислите расстояния: а) $|C\,(BPD)|$; б) $|C\,(APD)|$; в) $|(BC)\,(APD)|$.

4) Вычислите углы между: а) боковым ребром и основанием; б) боковой гранью и основанием; в) (PBD) и (PAC); г) (APD) и (BCP); д) (PA) и (CD).

5) Вычислите площадь сечения, проходящего через (AD) под углом $30°$ к основанию.

6) В каких границах лежат площади сечений из п. 2 (задачи а, б, в, д)?

7) Можно ли вокруг пирамиды описать сферу? вписать в неё сферу? Если да, то чему равны их радиусы?

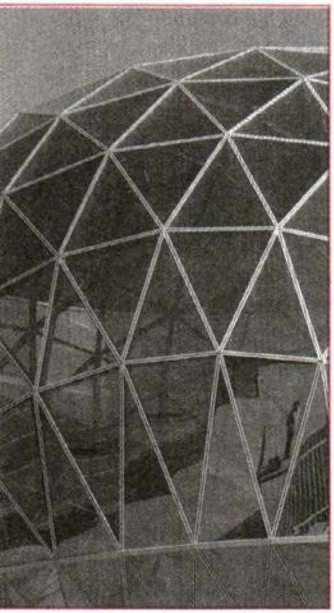
IV.8. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены сечения A_1BD и CB_1D_1. а) Докажите, что диагональ AC_1 делится ими на три равные части. б) Докажите, что она пересекает эти сечения в точках пересечения медиан.

Итоги главы IV

В главе IV завершается знакомство со **стереометрическими фигурами элементарной геометрии**. Многогранники — наиболее сложные из тел классической элементарной геометрии. Их изучение хорошо демонстрирует те вопросы, которые появляются при переходе в геометрии от наглядных описаний к точным формулировкам. Даже для разъяснения краткого определения многогранника как тела, граница которого состоит из конечного числа многоугольников, требуется объяснить: что такое тело, что такое граница (п. 23.1), а также что такое многоугольник. А дальше вопросы появляются при определении элементов многогранника — граней, рёбер, вершин и т. д. (п. 23.2). Не так элементарна элементарная геометрия!

Материал главы IV во многом описательный. Теорем в ней всего две — простая **теорема** 26 **о правильной пирамиде** (п. 22.2) и сложная **теорема** 27 **о том, что поворот в пространстве является движением** (п. 24.4).

В главе IV рассказано **об общем понятии симметрии фигуры** (п. 24.5) и много места отведено рассказу **о симметрии правильных призм, правильных пирамид, правильных многогранников** (п. 24.6 и 24.7).



Глава V

ОБЪЁМЫ ТЕЛ И ПЛОЩАДИ ИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Каждый из вас имеет представление об объёме и площади поверхности тела и умеет их вычислять в простейших случаях. Например, вы знаете, как найти объём прямоугольного параллелепипеда и площадь его поверхности. Наша задача — освоить вычисление этих величин в более сложных случаях.

Вообще вопрос об объёме и площади трудный, гораздо труднее всего, чем вы занимались до сих пор. Поэтому мы установим нужные результаты, больше используя наглядно очевидные соображения.

§ 25 Определение объёма

25.1 **Простые тела*.** Ясно, что одинаковые тела имеют равные объёмы, а когда из двух тел составляется одно, то их объёмы складываются.

Но мыслимые в геометрии тела могут быть настолько сложно устроены, что приписать им всем объём с указанными свойствами нельзя. Поэтому выделим простые тела.

Тело назовём **простым**, если каждая прямая, имеющая с телом общие точки, пересекает его поверхность по конечному числу отрезков и отдельных точек.

Очевидно, что многогранник является простым телом.

Приведём пример непростого тела. Возьмём в какой-либо плоскости α спираль с бесконечным числом витков, скручивающуюся в некоторой точке O (рис. 239, a). Вокруг этой спирали построим «улитку», также скручивающуюся к этой точке O (рис. 239, $б$). Любая прямая, проходящая через O в плоскости α, пересекает поверхность «улитки» по бесконечному числу точек.

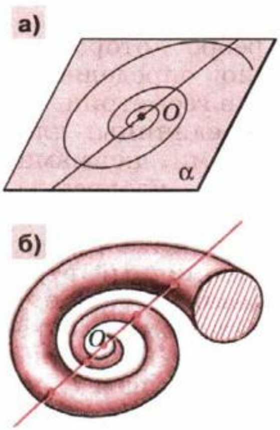


Рис. 239

Будем говорить, что тело **составлено** из нескольких тел, если общими точками любых двух из этих составляющих тел являются разве лишь точки их поверхностей.

В этой главе мы будем вычислять объёмы лишь простых тел, слово «простой» опускаем и говорим просто о телах.

25.2 **Определение объёма.** **Объёмом тела** называется положительная величина, определённая для тела так, что: 1) равные тела имеют равные объёмы; 2) если тело составлено из конечного числа тел, то его объём равен сумме их объёмов. Эти два свойства — **основные свойства объёма.**

Замечание. Длина отрезка характеризуется такими же свойствами — это положительная величина, определённая для каждого отрезка так, что: 1) равные отрезки имеют равные длины; 2) если отрезок составлен из конечного числа отрезков, то его длина равна сумме длин слагаемых отрезков. И площади простых плоских фигур характеризуются теми же свойствами.

Несмотря на сходство основных свойств, площади, объёмы и длины отрезков — это разные величины, так как относятся к разным объектам.

Длины, площади и объёмы измеряются в разных единицах. Эти единицы согласуются друг с другом следующим образом: если единичный отрезок выбран, то за единицу измерения площади принимают площадь единичного квадрата, а за единицу измерения объёма — объём единичного куба.

Единичный куб — это куб, ребро которого — единичный отрезок. Аналогично определяется единичный квадрат. Так принято в геометрии. На практике же применяют разные единицы: длину измеряют метрами, миллиметрами, дюймами, световыми годами и т. д.; площадь — квадратными метрами, гектарами, сотками; объёмы — кубическими метрами, литрами, галлонами и т. д.

Мы выберем раз и навсегда единичный отрезок, а вместе с ним единичный квадрат и единичный куб. Тогда под длинами, площадями и объёмами будем понимать их **численные значения** в этих единицах. Эти значения определены однозначно.

Равновеликими называются тела, объёмы которых равны.

Вопросы для самоконтроля

1 Какие основные свойства имеет объём?
2 В чём разница между объёмом и площадью?
3 Какие фигуры называются равновеликими?
4 Что принято за единицу объёма?

§ 26 Зависимость объёма тела от площадей его сечений

26.1 Объём прямого цилиндра

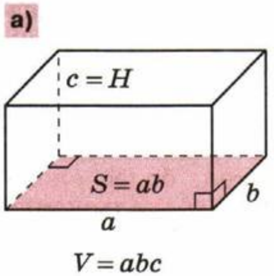
Теорема 28. **Объём прямого цилиндра равен произведению площади его основания и высоты:**

$$V = SH.$$

Доказательство. Вывод формулы $V = SH$ разобьём на несколько шагов.

Шаг 1. Для частного случая прямого цилиндра (рис. 240, *а*) — для прямоугольного параллелепипеда — формула $V = SH$ вам хорошо известна.

Шаг 2. Рассмотрим теперь прямую треугольную призму. На рисунке 240, *б* показано, как построить прямоугольный параллелепипед, сложенный из тех же частей, что и эта призма (подобно тому, как любой треугольник можно перестроить в прямоугольник, рис. 241, *а* на с. 188). Этот прямоугольный параллелепипед и рассматриваемая призма равновелики, а также равновелики их основания. Высоты же их равны. Поэтому снова имеем формулу $V = SH$.



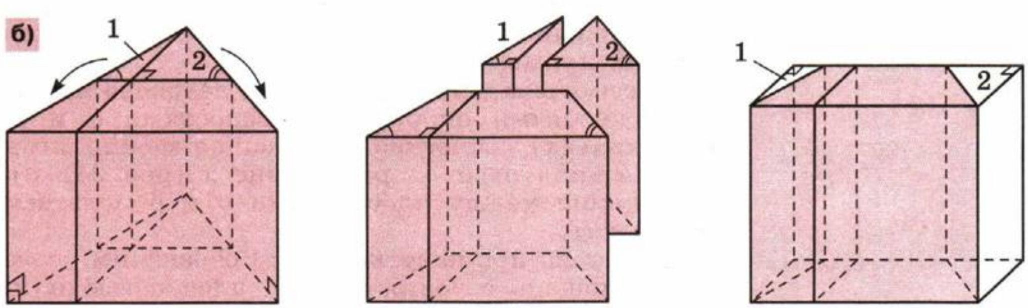
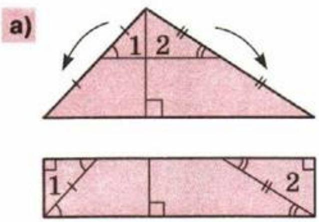
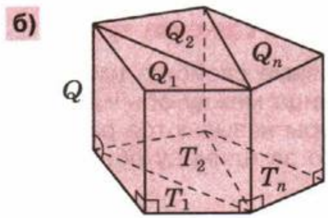


Рис. 240





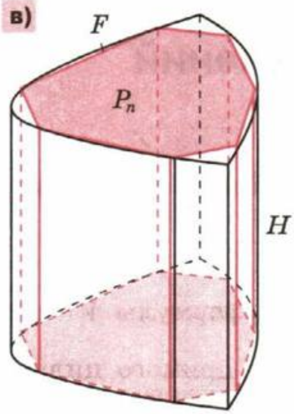


Рис. 241

Шаг 3. Далее рассмотрим произвольную прямую призму Q (рис. 241, *б*). Её можно разбить на прямые треугольные призмы Q_1, Q_2, ... Q_n, разбивая её основание на треугольники T_1, T_2, ... T_n. Тогда

$$V(Q) = V(Q_1) + V(Q_2) + \ldots + V(Q_n) =$$
$$= S(T_1)H + S(T_2)H + \ldots + S(T_n)H =$$
$$= (S(T_1) + S(T_2) + \ldots + S(T_n))H = SH.$$

Шаг 4. Наконец, рассмотрим общий случай: прямой цилиндр C, основанием которого является фигура F с площадью S, а высота которого равна H (рис. 241, *в*). Построим последовательность многоугольников P_n, содержащихся в фигуре F и «исчерпывающих» эту фигуру. Их площади $S(P_n)$ сходятся к S. Прямые призмы Q_n с основаниями P_n и высотой H «исчерпывают» цилиндр C. Объёмы V_n этих призм сходятся к V. Так как $V_n = S(P_n)H$, то, переходя в этом равенстве к пределу, получаем, что $V = SH$. ■

26.2 Зависимость объёма тела от площадей его сечений. Для вычисления объёмов тел, более сложных, чем прямой цилиндр, мы воспользуемся понятием производной. При этом мы рассматриваем лишь такие тела, которые разбиваются параллельными сечениями на достаточно тонкие *слои*, каждый из которых приближённо можно считать прямым цилиндром.

Рассмотрим некоторое тело T, лежащее между параллельными опорными плоскостями α и β, и пусть $\alpha(x)$ — плоскость, лежащая между ними и удалённая от α на расстояние x (рис. 242, *а*). Расстояние между плоскостями α и β полагаем равным H.

Для x из промежутка $[0, H]$ обозначим через $S(x)$ площадь сечения тела T плоскостью $\alpha(x)$ (рис. 242, *б*), а объём части тела T, лежащей между плоскостями α и $\alpha(x)$, обозначим через $V(x)$.

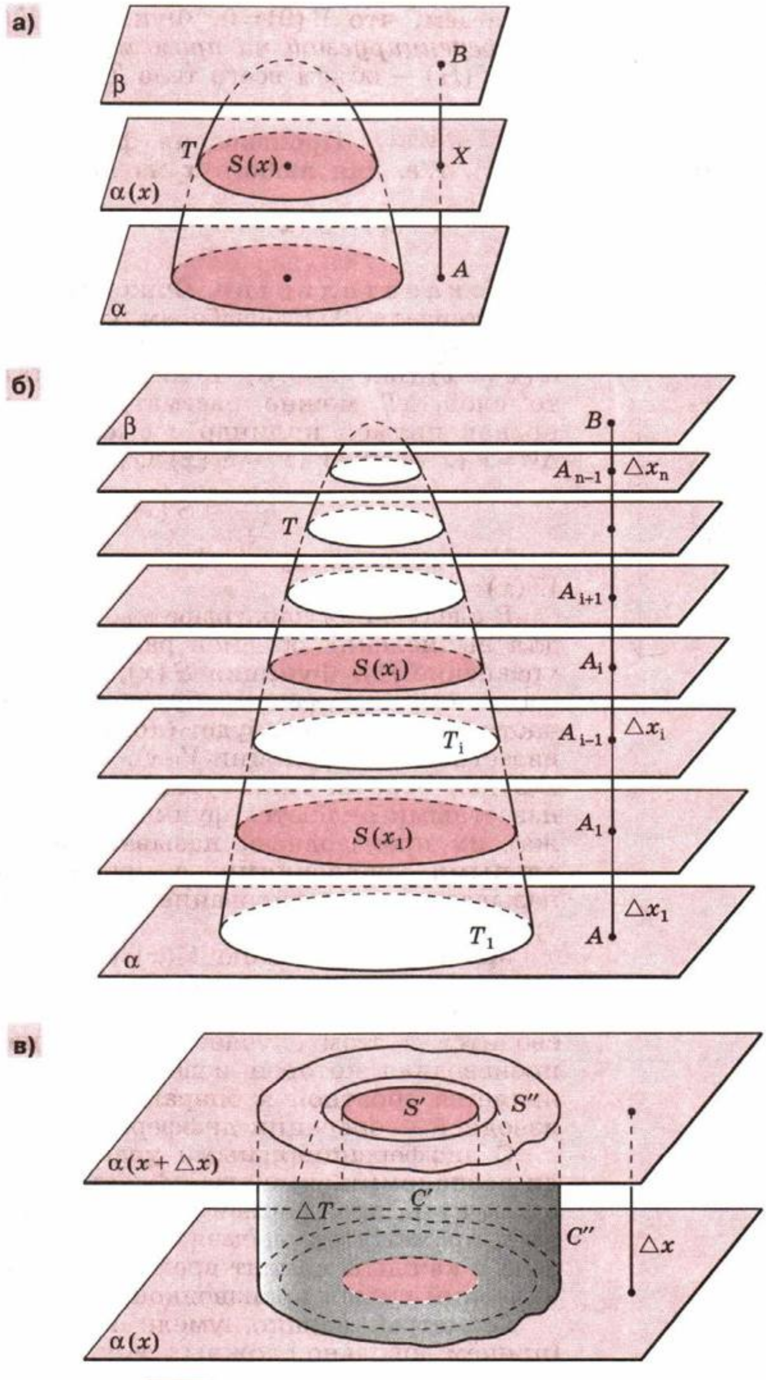

а)
β
B
T
S(x)
X
α(x)
A
α
б)
β
B
A_{n-1}
$\triangle x_n$
T
A_{i+1}
$S(x_i)$
A_i
A_{i-1}
$\triangle x_i$
T_i
$S(x_1)$
A_1
$\triangle x_1$
A
T_1
α
в)
S′
S″
α(x+△x)
C′
△T
C″
△x
α(x)

Рис. 242

Полагаем, что $V(0)=0$. Функцию $V(x)$ считаем *дифференцируемой на промежутке* $[0, H]$. Ясно, что $V(H)$ — объём всего тела T.

Теорема 29 *(об объёме тела).* **Производная функции $V(x)$ равна площади сечения $S(x)$, т. е. для любого x из промежутка $[0, H]$ имеет место равенство**

$$V'(x)=S(x). \qquad (1)$$

Доказательство. Фиксируем значение x из интервала $(0, H)$, выберем $\Delta x>0$ и рассмотрим слой ΔT тела T между плоскостями $\alpha(x)$ и $\alpha(x+\Delta x)$ (рис. 242, *в*). Если Δx достаточно мало, то слой ΔT можно рассматривать приближённо как прямой цилиндр с высотой Δx. Поэтому $\Delta V=V(x+\Delta x)-V(x)\approx S(x)\,\Delta x$,

$$\frac{\Delta V}{\Delta x}\approx S(x). \qquad (2)$$

Устремив к нулю Δx, получаем равенство $V'(x)=S(x)$. ■

В следующем параграфе мы выведем формулы для вычисления объёмов различных тел, решая уравнение (1). Функция $S(x)$, стоящая в правой части этого уравнения, будет известна. В левой части уравнения (1) будет стоять производная неизвестной нам функции $V(x)$. Функцию $V(x)$ мы и будем искать. Такие уравнения, в которых неизвестными являются функции и которые содержат их производные, называются **дифференциальными уравнениями**, а процесс их решения называется интегрированием дифференциальных уравнений.

Мы ищем функцию $V(x)$ по её производной $S(x)$, т. е. ищем первообразную функции $S(x)$. Интегрирование дифференциального уравнения сводится в этом случае к отысканию функции, производная которой известна. Такая операция является обратной к операции нахождения производной — операции дифференцирования.

С дифференциальными уравнениями вы могли познакомиться, изучая физику: например, мы ищем путь, пройденный некоторым телом за данный промежуток времени, зная скорость этого тела в каждый момент времени (вспомните механический смысл производной).

Геометры, однако, умели вычислять объёмы (причём довольно сложных фигур) и до того, как познакомились с производными и первообразными. Как же они это делали? Давайте, глядя на рисунок 242, *б*, представим себе тело T как объединение большого числа N его тонких слоёв между очень близкими параллельными сечениями с постоянной толщиной Δx. Тогда объём всего тела T будет суммой объёмов этих слоёв, а каждый i-й слой можно считать прямым цилиндром, площадь основания которого равна $S(x_i)$, а высота равна Δx. Приближённое значение объёма V тела T будет равно сумме

$$S(x_1)\,\Delta x + S(x_2)\,\Delta x + \ldots + S(x_n)\,\Delta x.$$

Предельное значение этой суммы при $\Delta x \to 0$ и даст значение объёма. Таким способом вычислял объёмы тел великий древнегреческий геометр Архимед (ок. 287—212 гг. до н. э.).

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычислить объём прямого цилиндра?
2. Как вычислить объём прямой призмы?
3. Как можно считать объём тела, используя первообразную?

Задачи

Задачи на объём цилиндра

26.1. Напишите формулу для объёма цилиндра вращения. а) Выразите из неё высоту цилиндра, его радиус. б) Пусть все линейные размеры цилиндра увеличились в два раза. Во сколько раз увеличился его объём? в) Объём прямого цилиндра требуется уменьшить в два раза. Как это можно сделать? г) Жидкость из полной цилиндрической пробирки переливают в другую, радиус которой в два раза меньше. Во сколько раз она должна быть выше? д) Из проволоки диаметром d_1 делают на волочильном станке проволоку диаметром d_2. Какова длина полученной проволоки, если исходная длина L?

26.2. а) В детали цилиндрической формы сделали сквозное цилиндрическое отверстие. Его радиус равен половине радиуса цилиндра. Какая часть объёма детали осталась? б) С цилиндрической заготовки сняли при обработке 0,1 части радиуса. Какая часть объёма цилиндра осталась?

26.3. Как вы будете делить на равновеликие части торт, имеющий форму цилиндра?

26.4. Исследуем | Можно ли разделить цилиндр на две равновеликие, но не равные фигуры?

26.5. а) В цилиндрическом сосуде находится жидкость. Как можно узнать, больше или меньше половины объёма сосуда налито? б) В цилиндрическом сосуде была налита доверху вода. Сосуд наклонили на некоторый угол. Как узнать, какой объём воды вылился?

26.6. Прямоугольник со сторонами a и b вращают вокруг: а) каждой из неравных сторон; б) осей симметрии. Найдите объём полученных фигур вращения.

26.7. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 2. При каком отношении между радиусом и высотой цилиндра его объём является наибольшим?

26.8. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 2. В каких границах находится объём цилиндра, если радиус цилиндра принадлежит промежутку: а) $\left(0; \frac{1}{3}\right]$; б) $\left[\frac{1}{3}; 1\right)$?

Задачи на объём прямой призмы

26.9. 1) Диагональ куба равна 1. Найдите его объём.
2) Составьте и решите задачу, обратную данной в 1).
3) Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна 1 и составляет углы φ_1 и φ_2 с двумя его: а) рёбрами; б) гранями.

26.10. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проводится сечение через AB. Вычислите объёмы полученных частей куба, если плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

26.11. Как разделить на две равновеликие части: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) правильную призму?

26.12. Многогранник, являющийся частью куба, задан тремя проекциями (рис. 243). Какие надо сделать замеры на проекциях, чтобы вычислить его объём?

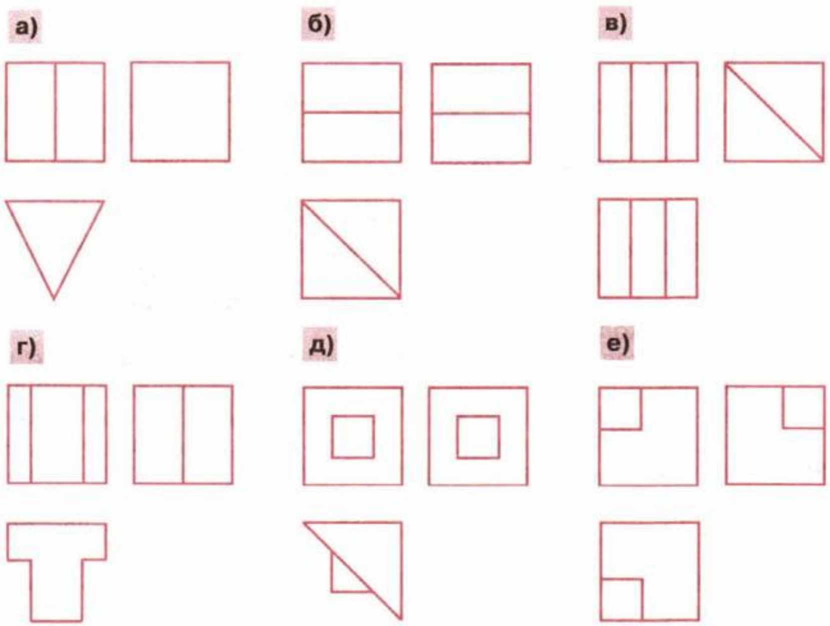


Рис. 243

26.13. Вычислите объём прямой треугольной призмы, если её боковое ребро равно большей из сторон основания и: а) две стороны основания равны 1, а угол между ними равен 120°; б) стороны основания 5, 6, 7; в) сторона основания равна 1, а углы при ней равны 45° и 60°.

26.14. Площадь боковой грани правильной треугольной призмы равна 1. В каких границах лежит её объём?

26.15. В каких границах лежит объём: а) правильной четырёхугольной призмы с диагональю, равной 1; б) прямоугольного параллелепипеда, у которого одна сторона в два раза больше другой, а диагональ равна 1?

§ 27 Объёмы некоторых тел

27.1 Объём цилиндра. В § 26 мы вывели формулу для объёма прямого цилиндра. Она верна и для наклонного цилиндра.

А именно имеет место следующая теорема:

Теорема 30. Объём цилиндра, в частности призмы, равен произведению площади основания и высоты:

$$V = SH.$$

Доказательство. Все сечения цилиндра плоскостями, параллельными плоскости его основания, равны (п. 18.1). Поэтому все их площади $S(x)$ равны площади S основания цилиндра. Следовательно, уравнение (1) на с. 190, выведенное в теореме 29 об объёме тела, для цилиндра имеет вид $V'(x) = S$. Функция $V(x)$, производная которой постоянна и равна S, является линейной функцией и имеет вид: $V(x) = Sx + b$.

Воспользуемся тем, что $V(0) = 0$. Получим $0 = S \cdot 0 + b$, т. е. $b = 0$.

Итак, $V(x) = Sx$, а объём цилиндра

$$V = V(H) = SH. \ ■$$

27.2 Объём конуса

Теорема 31. Объём конуса, в частности пирамиды, равен одной трети произведения площади основания и высоты:

$$V = SH.$$

Доказательство. Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, подобно основанию (п. 19.1). Если плоскость проходит на рас-

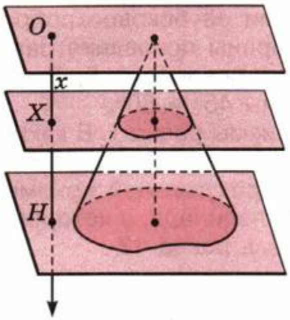


Рис. 244

стоянии x от вершины, то коэффициент подобия равен $\frac{x}{H}$ (рис. 244). Поэтому площадь сечения $S(x)$ такой плоскостью равна $S(x) = \left(\frac{x}{H}\right)^2 S$, где S — площадь основания конуса. Его можно записать так: $S(x) = \frac{S}{H^2} x^2$. Так как S и H — постоянные для данного конуса, то уравнение, выведенное в теореме 29 для объёма конуса, имеет вид:

$$V'(x) = ax^2, \text{ где } a = \frac{S}{H^2}.$$

Функция $V(x)$, производная которой равна ax^2, имеет вид:

$$V(x) = \frac{1}{3} ax^3 + b.$$

Воспользуемся тем, что $V(0) = 0$. Получим $0 = \frac{1}{3} a \cdot 0 + b = 0$, т. е. $b = 0$. Поэтому $V(x) = \frac{1}{3} ax^3$, а объём конуса $V = V(H) = \frac{1}{3} aH^3 = \frac{1}{3} SH$. ■

27.3 Объём шара

Теорема 32. Объём шара радиуса R выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

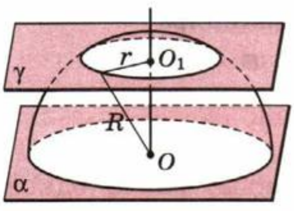


Рис. 245

Доказательство. Для вывода формулы удобно взять полушар — часть шара, ограниченную плоскостью α, проходящей через центр шара.

Плоскость γ, параллельная плоскости α и проходящая от неё на расстоянии x, пересекает шар по кругу радиуса $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ (рис. 245). Площадь $S(x)$ этого круга равна $\pi(R^2 - x^2)$. Объём части полушара между плоскостями α и γ обозначим через $U(x)$. Для полушара расстояние H, между опорными плоскостями, о котором говорится в теореме 29, равно R. Согласно этой теореме, $U'(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Функция $U(x)$, которая удовлетворяет этому уравнению, имеет вид:

$$U(x) = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + b.$$

Как и в предыдущих двух случаях, взяв $x=0$, получаем, что $b=0$. Поэтому объём полушара $U(R)=\pi\left(R^2-\frac{1}{3}R^3\right)$, т. е. $U(R)=\frac{2}{3}\pi R^3$. Поскольку объём V шара в два раза больше объёма полушара, то $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. ■

27.4 **Изменение объёма при подобии.** Формулы для объёмов, выведенные в этом параграфе, показывают, что **при подобных преобразованиях объёмы тел умножаются на куб коэффициента подобия.**

Действительно, при подобных преобразованиях линейные размеры фигур умножаются на коэффициент подобия, а площади фигур умножаются на квадрат коэффициента подобия. Поэтому их произведения, которые присутствуют в формулах объёмов цилиндров и конусов, умножатся на куб коэффициента подобия. Объём же шара изменяется так же, как куб его радиуса, т. е. умножается на куб коэффициента подобия.

Вопросы для самоконтроля

1. По какой формуле вычисляется объём: а) любого цилиндра; б) наклонной призмы; в) конуса; г) пирамиды; д) шара?
2. Почему при выводе формул объёма любого цилиндра, конуса, шара возможно применять первообразную?
3. Откуда следует, что объём шара в два раза больше объёма полушара?

Задачи

Задачи к п. 27.1

27.1. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра основания равны 1, а боковые рёбра равны 2. Вычислите её объём, если вершина A_1 проектируется в: а) точку C; б) середину ребра BC; в) центр треугольника ABC.

27.2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра основания равны 2, а боковые рёбра равны 1. Вычислите её объём, если: а) боковое ребро составляет с основанием угол 45°; б) грань BCC_1B_1 — прямоугольник, плоскость которого наклонена к основанию под углом 30°; в) $\angle A_1AB=\angle A_1AC=60°$; г) две её боковые грани перпендикулярны основанию.

27.3. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием является квадрат со стороной 1, а боковое ребро равно 2. Вычислите его объём, если вершина B_1 проектируется в: а) точку C; б) точку D; в) центр нижнего основания.

27.4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани — ромбы с острым углом 60° и стороной 1. Вычислите его объём, если в вершине A сходятся: а) острые углы трёх ромбов; б) острый угол только одного ромба.

27.5. Четыре грани параллелепипеда — квадраты. Сторона квадрата равна 1. Вычислите наибольшее значение его объёма.

27.6. Для наклонной призмы рассмотрим такие величины: V — объём, S_1 — площадь перпендикулярного сечения, L — боковое ребро. Докажите, что $V=S_1L$.

27.7. На диагоналях граней AB_1, AC, AD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построен новый параллелепипед. Найдите отношение объёмов нового и старого параллелепипедов.

Задачи к п. 27.2

Объём конуса и усечённого конуса

27.8. Дополняем теорию | Найдите объём усечённого конуса, зная радиусы R и r его оснований $(R>r)$ и высоту H.

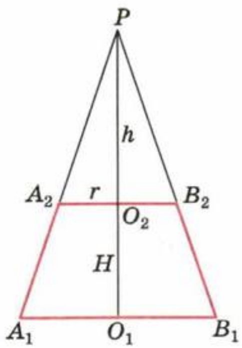


Рис. 246

Решение. На рисунке 246 изображено осевое сечение двух конусов — большего и меньшего, с помощью которых образуется данный усечённый конус, а также осевое сечение усечённого конуса. Объём данного усечённого конуса V вычислим как разность объёмов двух конусов: $V=V_1-V_2$, где V_1 — объём большего конуса, а V_2 — объём меньшего верхнего конуса. Пусть h — высота меньшего конуса. Тогда $h+H$ — высота большего конуса.

По теореме об объёме конуса

$$V_2=\frac{1}{3}\pi r^2h \quad \text{и} \quad V_1=\frac{1}{3}\pi R^2(H+h).$$

Тогда

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(R^2(H+h)-r^2h\right).$$

В этом равенстве нам неизвестна высота h. Выразим её через данные величины.

Рассмотрим осевые сечения PA_1B_1 и PA_2B_2 двух конусов, лежащие в одной плоскости. Из подобия треугольников PA_1B_1 и PA_2B_2 имеем:

$$\frac{H+h}{h}=\frac{R}{r}, \quad \text{или} \quad \frac{H}{h}+1=\frac{R}{r}.$$

Отсюда $h=H:\left(\frac{R}{r}-1\right)=\frac{Hr}{R-h}$. Следовательно,

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(R^2(H+h)-r^2h\right)=\frac{1}{3}\pi\left(R^2H+\frac{Hr}{R-r}(R^2-r^2)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(R^2H+Hr(R+r)\right)=\frac{1}{3}\pi H\left(R^2+Rr+r^2\right). \blacksquare$$

27.9. Запишите формулу для объёма конуса. а) Выразите из неё высоту конуса, радиус его основания. б) Выразите объём конуса через образующую и радиус основания; через образующую и высоту.

27.10. Вычислите объём конуса, у которого: а) образующая равна 1 и составляет с плоскостью основания угол 30°; б) образующая равна 2, а высота равна 1; в) образующая равна диаметру основания и равна d.

27.11. Вычислите объём тела вращения, полученного при вращении: а) равностороннего треугольника со стороной 2 вокруг оси симметрии; б) равностороннего треугольника со стороной 1 вокруг прямой, параллельной оси симметрии и проходящей через вершину; в) равнобедренной трапеции с основаниями 4 и 2 и углом при основании 45° вокруг оси симметрии; г) ромба со стороной 1 и острым углом 60° вокруг меньшей диагонали; д) ромба из п. г), но при вращении вокруг прямой, параллельной меньшей диагонали и проходящей через вершину.

27.12. Вода в коническом сосуде была налита доверху. а) На сколько понизился её уровень, когда отлили половину имеющейся воды? б) Какая часть объёма осталась, когда уровень воды понизился в два раза?

27.13. Как найти объём усечённого конуса, у которого известны радиусы обоих оснований и: а) образующая; б) угол наклона образующей к плоскости основания?

27.14. Образующая конуса равна 1.
1) При каком угле φ при вершине его осевого сечения объём конуса будет наибольшим?
2) В каких границах лежит его объём, если высота конуса находится в промежутке: а) $(0;\ 0{,}5]$; б) $[0{,}5;\ 1)$?

27.15. Радиус основания конуса равен 2, а высота равна 1. В конусе провели сечение плоскостью через вершину под углом 45° к высоте конуса. Найдите отношение объёмов частей конуса.

27.16. Площадь осевого сечения конуса равна 1. а) Каким может быть объём конуса? б) Как изменяется объём конуса, когда радиус его основания возрастает от 3 до 6?

Задачи на объём пирамиды

27.17. Как найти объём правильной треугольной (четырёхугольной) пирамиды, у которой известны: а) сторона основания и высота; б) сторона основания и боковое ребро; в) сторона основания и двугранный угол при основании; г) боковое ребро и его угол с основанием?

27.18. Как найти объём правильной треугольной (четырёхугольной) усечённой пирамиды, у которой известны стороны оснований и: а) высота; б) боковое ребро?

27.19. Вычислите объём треугольной пирамиды $PABC$, у которой все рёбра основания ABC равны 2, ребро $PA = 3$ и при этом: а) P проектируется в точку B; б) P проектируется в середину ребра BC; в) P проектируется в центр основания ABC; г) угол между PA и (ABC) равен 45°; д) $\angle PAC = \angle PAB = 60°$; е) $PB = PC = 2$.

27.20. Вычислите наибольшее значение объёма тетраэдра, у которого: а) пять рёбер равны 1; б) четыре ребра равны 1.

27.21. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 1. В каких границах лежит её объём?

27.22. Прикладная геометрия | Как найти объём реального тетраэдра, делая замеры только на его поверхности?

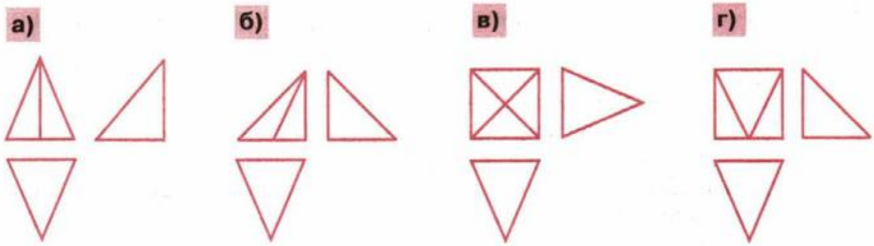


Рис. 247

27.23. Вычислите объём четырёхугольной пирамиды $PABCD$, основанием которой является квадрат со стороной 1, ребро PA равно 2 и при этом: а) P проектируется в точку B; б) P проектируется в точку C; в) PA составляет с основанием угол 30°; г) $|PD| = |PC| = 2$; д) грани PAD и PAB перпендикулярны основанию.

27.24. В четырёхугольной пирамиде все боковые рёбра равны 1. а) При каком угле φ между соседними боковыми рёбрами её объём наибольший, если её основание — квадрат? б) В каких границах лежит её объём, если её основание — прямоугольник, одна сторона которого в два раза больше другой стороны?

27.25. Прикладная геометрия | Какие измерения надо сделать на поверхности реальной четырёхугольной пирамиды, чтобы вычислить её объём?

27.26. Как вычислить объём правильной усечённой четырёхугольной (треугольной) пирамиды, если известны стороны двух оснований и: а) угол наклона бокового ребра к большему основанию; б) угол между боковой гранью и большим основанием?

27.27. Многогранник задан своими проекциями (рис. 247). Какие надо сделать измерения на этих проекциях, чтобы вычислить его объём?

27.28. Как разделить параллелепипед на: а) шесть равновеликих пирамид; б) три равновеликие пирамиды.

27.29. В параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан тетраэдр ACB_1D_1. Чему равно отношение их объёмов?

Задачи к п. 27.3

27.30. Дан шар объёма V. Можно ли его поместить в тело объёма $2V$, если это: а) куб; б) правильная треугольная призма; в) цилиндр?

27.31. Запишите формулу объёма шара. а) Выразите его радиус как функцию от объёма. б) Пусть радиус шара увеличили в два раза. Что произошло с объёмом? в) Пусть объём уменьшился в три раза. Как изменился радиус шара?

27.32. Из тысячи металлических шариков радиуса 1 сделали один шар. Каков его радиус?

27.33. Прикладная геометрия | Что бы вы предпочли: съесть арбуз диаметром 30 см вчетвером или съесть арбуз диаметром 40 см ввосьмером?

27.34. а) Какая часть объёма шара радиуса R содержится между двумя концентрическими сферами (сферами с одним центром) радиусами R и $0{,}9R$?

б) Каким надо взять радиус меньшей сферы, чтобы между ними заключалась $\frac{1}{4}$ объёма шара? $\frac{1}{2}$ объёма шара?

27.35. Вычислите объём наибольшего шара, расположенного в: а) кубе с ребром 1; б) прямоугольном параллелепипеде с рёбрами 1, 2, 3; в) правильном тетраэдре с ребром 1; г) правильной треугольной призме, все рёбра которой равны 1; д) правильной четырёхугольной пирамиде, все рёбра которой равны 1; е) конусе, осевое сечение которого — прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой 1; ж) цилиндре, осевое сечение которого — квадрат со стороной 1.

§28 Площадь поверхности

28.1 О понятии площади поверхности. Площадь поверхности многогранника, естественно, считается равной сумме площадей его граней. Задача состоит в определении площади искривлённой поверхности, например сферы, боковых поверхностей цилиндра и конуса.

Площадь искривлённой поверхности вычисляют так. Разбивают поверхность на такие куски, которые уже достаточно мало отличаются от плоских. Тогда находят площади этих кусков, как если бы они были плоскими (например, заменяя их проекциями на плоскости, от которых поверхность мало отклоняется). Сумма их площадей и даст приближённо площадь искривлённой поверхности.

Так поступают на практике: площадь поверхности купола, например собора, получается как сумма площадей покрывающих его кусков листового металла (рис. 248, *а*). Ещё лучше это видно на примере земной поверхности. Она искривлена — примерно сферическая. Но участки, небольшие в сравнении с размерами всей Земли, измеряют как плоские.

Вычисляя площадь выпуклой поверхности, описывают вокруг неё, когда это возможно, близкую к ней многогранную поверхность. Её грани будут приближённо представлять куски поверхности, а её площадь даёт приближённо площадь самой искривлённой поверхности. При этом **многогранная поверхность называется описанной вокруг выпуклой поверхности**, если её грани лежат в опорных плоскостях к данной выпуклой

а)

б)

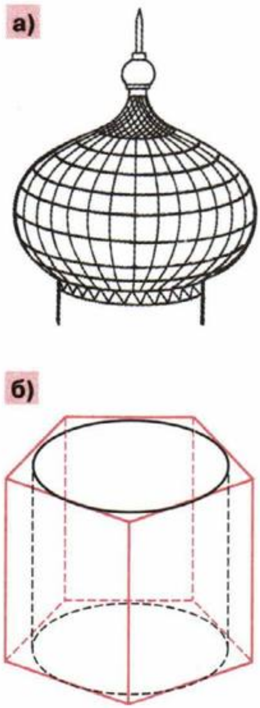


Рис. 248

поверхности и она располагается с той же стороны от каждой такой плоскости, что и данная поверхность.

Аналогично определяется **многогранник, описанный вокруг выпуклого тела** (рис. 248, *б*).

В следующих пунктах этого параграфа вычисляются площади простейших поверхностей. При этом вычисление площади сферы основано на следующем интересном предложении.

Лемма *(об объёме описанного многогранника)*. **Объём $V(B)$ многогранника B, описанного вокруг шара радиуса R, и площадь $S(B)$ его поверхности связаны соотношением**

$$V(B) = \frac{1}{3} S(B) R. \qquad (1)$$

Замечание. Аналогичным соотношением связаны площадь $S(F)$ многоугольника F, описанного вокруг круга радиуса R, и его периметр P (рис. 249, *а*):

$$S(F) = \frac{1}{2} PR.$$

Доказательство. Опишем вокруг сферы какой-либо многогранник B. Пусть у него n граней $Q_1, \ldots, Q_n$. Разобьём его на пирамиды $T_1, \ldots, T_n$ с общей вершиной в центре шара O и с гранями $Q_1, \ldots, Q_n$ многогранника B в основаниях (рис. 249, *б*).

Грань Q_1 лежит в опорной плоскости сферы и, значит, перпендикулярна радиусу сферы в точке касания. Стало быть, этот радиус есть высота пирамиды T_1. Значит,

$$V(T_1) = \frac{1}{3} S(Q_1) R,$$

где $S(Q_1)$ — площадь грани Q_1.

Аналогичные равенства верны для остальных пирамид $T_2, \ldots, T_n$. Поэтому

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) + \ldots + V(T_n) =$$
$$= \frac{1}{3} S(Q_1) R + \ldots + \frac{1}{3} S(Q_n) R =$$
$$= \frac{1}{3} (S(Q_1) + \ldots + S(Q_n)) R = \frac{1}{3} S(B) R. \blacksquare$$

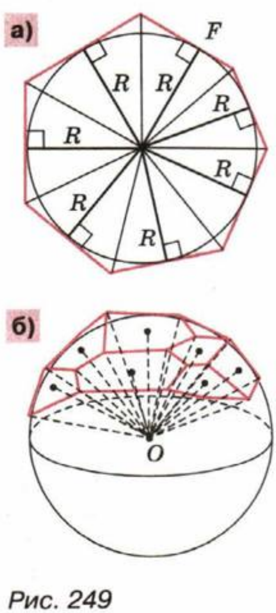


Рис. 249

28.2 Площадь сферы

Теорема 33. **Площадь сферы радиуса R выражается формулой**

$$S = 4\pi R^2. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть дан шар радиуса R. Возьмём на его сфере n точек, не лежащих в одной полусфере, и проведём через них опорные плоскости к шару. Эти плоскости ограничат многогранник B_n, описанный вокруг шара.

Объём V шара приближённо равен объёму V_n многогранника B_n, а площадь S поверхности шара приближённо равна площади поверхности S_n многогранника B_n. Поэтому

$$\frac{V}{S} \approx \frac{V_n}{S_n}.$$

Будем увеличивать число n выбранных точек и брать их всё гуще. Например, возьмём достаточно густую сеть параллелей и меридианов и выберем точки их пересечения. Тогда величина $\frac{V_n}{S_n}$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $\frac{V}{S}$.

С другой стороны,

$$\frac{V_n}{S_n} = \frac{1}{3}R$$

при всех n (по лемме из п. 28.1).

Поэтому два числа $\frac{V}{S}$ и $\frac{1}{3}R$ отличаются сколь угодно мало. Это возможно только в случае равенства этих чисел.

Следовательно,

$$\frac{V}{S} = \frac{1}{3}R.$$

Отсюда

$$S = \frac{3V}{R} = \frac{3 \cdot 4\pi R^3}{3R} = 4\pi R^2. \blacksquare$$

Задачи об измерении шара и площади его поверхности были решены великим Архимедом в его сочинении «О шаре и цилиндре». Архимед для доказательства своих теорем предвосхитил методы интегрального исчисления на 2000 лет.

Теорема 34. Площадь боковой поверхности цилиндра вращения с высотой H и радиусом основания R выражается формулой

$$S_б = 2\pi RH.$$

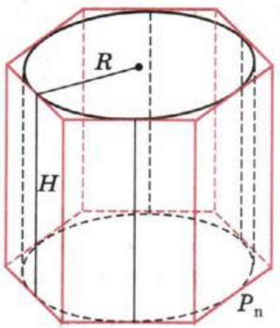


Рис. 250

Доказательство. Пусть дан цилиндр вращения с высотой H и радиусом основания R (рис. 250). Опишем вокруг цилиндра правильную n-угольную призму B_n. Её высота равна H, а основаниями будут правильные n-угольники, описанные вокруг оснований цилиндра. Площади этих n-угольников обозначим через S_n, а периметры — через P_n.

Объём V цилиндра приближённо равен объёму V_n призмы B_n, а площадь $S_б$ боковой поверхности цилиндра приближённо равна площади боковой поверхности $(S_б)_n$ призмы B_n. Поэтому

$$\frac{V}{S_б} \approx \frac{V_n}{(S_б)_n}.$$

Будем увеличивать число n. Тогда величина $\frac{V_n}{(S_б)_n}$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $\frac{V}{S_б}$. С другой стороны,

$$\frac{V_n}{(S_б)_n} = \frac{S_n H}{P_n H} = \frac{S_n}{P_n} = \frac{\frac{1}{2} P_n R}{P_n} = \frac{1}{2} R.$$

Поэтому два числа $\frac{V}{S_б}$ и $\frac{1}{2} R$ отличаются сколь угодно мало.

Это возможно только в случае равенства этих чисел. Следовательно,

$$\frac{V}{S_б} = \frac{1}{2} R.$$

Отсюда

$$S_б = \frac{2V}{R} = \frac{2\pi R^2 H}{R} = 2\pi RH. \ \blacksquare$$

Поскольку площадь S всей поверхности цилиндра складывается из площади боковой поверхности и площадей оснований, то

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$

Теорема 35. **Площадь боковой поверхности конуса вращения с образующей поверхности L и радиусом основания R выражается формулой**

$$S_б = \pi R L.$$

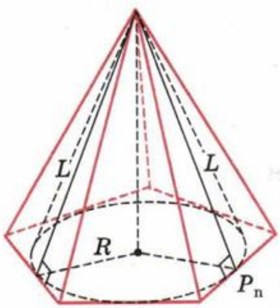


Рис. 251

Доказательство. Пусть дан конус вращения с образующей поверхности L и радиусом основания R (рис. 251). Опишем около конуса правильную n-угольную пирамиду B_n. Её основанием будет правильный n-угольник, описанный около основания конуса. Высоты боковых граней пирамиды равны L (по теореме о трёх перпендикулярах). Поэтому площадь боковой поверхности $(S_б)_n$ пирамиды B_n:

$$(S_б)_n = \frac{1}{2} P_n L,$$

где P_n — периметр основания пирамиды B_n. Площадь основания B_n обозначим через S_n.

Объём V конуса приближённо равен объёму V_n пирамиды B_n, площадь $S_б$ боковой поверхности конуса приближённо равна площади боковой поверхности $(S_б)_n$ пирамиды B_n. Поэтому $\frac{V}{S_б} \approx \frac{V_n}{(S_б)_n}$. Будем увеличивать число n. Тогда величина $\frac{V_n}{(S_б)_n}$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $\frac{V}{S_б}$. Вычислим её:

$$\frac{V_n}{(S_б)_n} = \frac{\frac{1}{3} S_n H}{\frac{1}{2} P_n L} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} P_n R H}{3 P_n L} = \frac{1}{3} \frac{RH}{L}.$$

Поэтому два числа $\frac{V}{S_б}$ и $\frac{1}{3}\frac{RH}{L}$ отличаются сколь угодно мало. Это возможно только в случае равенства этих чисел. Значит, $\frac{V}{S_б} = \frac{1}{3}\frac{RH}{L}$.

Отсюда

$$S_б = \frac{3VL}{RH} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 H L}{RH} = \pi R L. \ \blacksquare$$

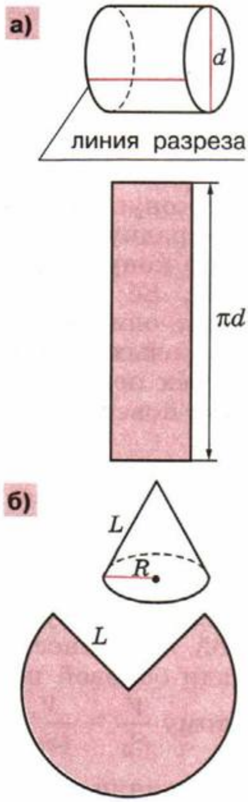


Рис. 252

Прибавляя к площади боковой поверхности конуса вращения площадь его основания, получаем площадь S всей поверхности конуса вращения:

$$S = \pi RL + \pi R^2.$$

Замечание. Наглядно ясно, что если боковую поверхность реального цилиндра вращения (например, консервной банки) разрезать вдоль одной образующей, то затем её можно развернуть в плоский прямоугольник (рис. 252, *а*). Одна сторона полученного прямоугольника равна длине образующей H, а другая — длине окружности основания цилиндра, т. е. $2\pi R$. Поэтому его площадь, а тем самым и площадь боковой поверхности цилиндра вращения, равна $2\pi RH$. Аналогично развёрткой боковой поверхности конуса вращения является сектор круга радиуса L с дугой длиной $2\pi R$ (рис. 252, *б*). Его площадь равна πRL. Это интуитивно ясное вычисление площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса вращения требует достаточно сложных обоснований. Например, почему при таких «развёртываниях» искривлённых поверхностей в плоские фигуры их площадь не меняется? Кроме того, лишь немногие поверхности допускают такую развёртку на плоскость. Вычислить таким способом, например, площадь сферы нельзя.

Вопросы для самоконтроля

1 Как приближённо можно вычислить площадь искривлённой поверхности? Как повысить точность вычисления?

2 Какой формулой связаны радиус шара, площадь поверхности описанного вокруг него многогранника и объём этого многогранника?

3 По какой формуле вычисляют площадь: а) сферы; б) поверхности цилиндра; в) поверхности конуса?

Задачи

Задачи к п. 28.1

28.1. Дополняем теорию | Докажите, что: а) площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания и высоты; б) площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра её перпендикулярного сечения и бокового ребра;

в) площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания и апофемы.

28.2. Дополняем теорию | Докажите, что около сферы можно описать: а) куб; б) правильную n-угольную пирамиду.

28.3. Дополняем теорию | Докажите, что сферу можно вписать в: а) куб; б) правильную n-угольную пирамиду; в) конус.

28.4. а) Куб с ребром 1 разрезали на 1000 кубиков, равных между собой. Во сколько раз общая площадь поверхности полученных кубиков больше площади поверхности данного куба? б) На сколько равных между собой кубиков надо разрезать данный куб, чтобы общая площадь поверхности кубиков была в 10^3 раз больше, чем поверхность данного куба?

28.5. а) Площадь поверхности одного куба больше площади поверхности другого куба. Докажите, что объём первого куба тоже больше. б) Докажите утверждение, обратное а). **в)** Установите связь между площадью поверхности куба и его объёмом, получив какую-либо формулу. **г)** Верны ли результаты задач а) и б) для прямоугольного параллелепипеда?

28.6. Через диагональ основания куба проводят сечение. В каком отношении разделилась этим сечением площадь поверхности куба, если оно: а) составляет с плоскостью основания угол 30°; б) проведено под углом 60° к основанию; в) параллельно диагонали куба; г) перпендикулярно диагонали куба?

28.7. В правильной четырёхугольной призме диагональ равна 1. При каком угле между диагональю и плоскостью основания призма имеет наибольшую площадь боковой поверхности?

28.8. а) Площадь поверхности правильной четырёхугольной призмы равна 6. В каких границах находится её объём? б) Объём правильной четырёхугольной призмы равен 1. В каких границах находится площадь её поверхности?

28.9. Прикладная геометрия | Деревянный брус имел вид прямой треугольной призмы. Сделали два поперечных и параллельных между собой его распила, и получилась наклонная треугольная призма. Как найти площадь её поверхности, сделав как можно меньше измерений?

28.10. В призме $ABCA_1B_1C_1$ основание ABC — правильный треугольник со стороной 1, а боковое ребро равно 2. Вычислите площадь её поверхности, если: а) грань AA_1C_1C — прямоугольник, плоскость которого составляет с основанием угол 60°; б) вершина B_1 проектируется в центр треугольника ABC.

28.11. Как вычислить площадь боковой поверхности правильной треугольной (четырёхугольной) усечённой пирамиды, у которой известны стороны оснований и: а) боковое ребро; **б)** угол бокового ребра с основанием; **в)** угол между боковой гранью и основанием; **г)** высота; **д)** угол между противоположными боковыми гранями (для четырёхугольной пирамиды)?

28.12. Объём правильной треугольной пирамиды равен $4\sqrt{3}$. Какой угол φ составляет боковая грань с основанием, когда площадь боковой поверхности наименьшая?

28.13. Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен 4. При каком угле φ между боковой гранью и основанием площадь её боковой поверхности становится наименьшей?

28.14. Какие измерения надо сделать на проекциях многогранника (см. рис. 247), чтобы вычислить площадь его поверхности?

28.15. Вычислите радиус сферы, вписанной в: а) правильный тетраэдр с ребром 2; б) правильную четырёхугольную пирамиду с ребром основания 2 и боковым ребром 3.

28.16. Исследуем | Можно ли описать около сферы: а) куб; б) прямую треугольную призму; в) наклонный параллелепипед; г) правильную пирамиду; д) правильную усечённую пирамиду? Какие для этого должны выполняться условия?

Задачи к п. 28.2

28.17. Из формулы для площади сферы выразите её радиус.

28.18. а) Выразите объём шара через площадь его поверхности. б) Запишите обратную зависимость. в) Пусть объём шара начал расти. Как изменится при этом площадь его поверхности? г) Решите задачу, обратную данной в п. в). д) Пусть площадь поверхности шара увеличилась в два раза. Как изменился его объём? е) Пусть объём шара уменьшился в три раза. Как изменилась площадь его поверхности? ж) Может ли объём шара численно равняться площади его сферы?

28.19. Окрашены два шара. Радиус одного в два раза больше радиуса другого. Во сколько раз больше ушло на него краски?

28.20. Исследуем | Из шара площадью поверхности 1 см^2 сделали какое-то число одинаковых шариков. Может ли суммарная площадь их поверхностей быть больше, чем 1 м^2?

28.21. Площадь поверхности шара равна S. Чему равна площадь поверхности полушара?

28.22. Пусть радиус шара равен 1. Чему равна площадь поверхности части шара, которая получилась после проведения в нём: а) сечения, проходящего через диаметр; б) двух перпендикулярных сечений, проходящих через один диаметр; в) трёх попарно перпендикулярных сечений, проходящих через его центр?

28.23. Пусть радиус сферы увеличивается. а) Докажите, что скорость изменения площади сферы пропорциональна радиусу. б) Докажите, что скорость изменения объёма шара равна площади его сферы.

Задачи к п. 28.3

28.24. Вычислите площадь поверхности цилиндра, у которого: а) осевое сечение — квадрат со стороной 2; б) развёртка боковой поверхности — прямоугольник со сторонами 2 и 3.

28.25. Исследуем | а) Запишите формулу для площади боковой поверхности цилиндра. Выразите из неё R, H. б) Пусть известна площадь боковой поверхности цилиндра. Можно ли найти площадь поверхности цилиндра; его объём? в) Известна площадь поверхности цилиндра. Можно ли найти его объём? г) Известен объём цилиндра. Можно ли найти площадь его боковой поверхности; его поверхности?

28.26. Радиус основания цилиндра растёт, а образующая постоянна. Докажите, что: а) скорость роста площади боковой поверхности постоянна; б) скорость роста объёма пропорциональна площади боковой поверхности;

в) скорость роста площади поверхности линейно зависит от радиуса.

28.27. Из двух равных цилиндров сделали тело (рис. 253). Как найти площадь поверхности этого тела? Как найти его объём?

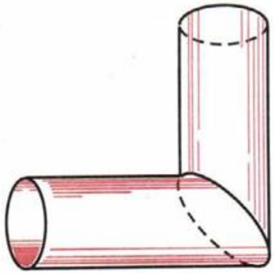


Рис. 253

28.28. Объём цилиндра равен 16π.
1) Каковы размеры его осевого сечения, когда площадь его поверхности наименьшая?
2) В каких границах находится площадь его поверхности, если радиус основания цилиндра лежит в промежутке: а) $(0; 1)$; б) $[1; 4]$; в) $[4; \infty)$?

28.29. Площадь поверхности цилиндра равна 54π.
1) Какова форма его осевого сечения, когда его объём наибольший?
2) В каких границах находится объём, если радиус основания цилиндра лежит в промежутке: а) $[1; 4]$; б) $[2; 5]$; в) $[4; 5]$?

28.30. Чему равна площадь поверхности конуса, у которого: а) осевое сечение — равносторонний треугольник со стороной 2; б) развёртка боковой поверхности — четверть круга радиуса 1; в) развёртка боковой поверхности — полукруг радиуса R; г) образующая равна L и образует с основанием угол φ?

28.31. а) Запишите формулу для площади боковой поверхности конуса $S_б$. Выразите из неё R, L. б) Известна площадь боковой поверхности конуса $S_б$. Можно ли найти площадь его поверхности S; его объём V? **в)** Известна S. Можно ли найти $S_б$ и V? **г)** Известен объём V. Можно ли найти S и $S_б$?

28.32. Определите, каким числом может быть отношение площади основания конуса и площади его боковой поверхности.

28.33. Образующая конуса равна 1. В каких границах находится площадь его: а) боковой поверхности; б) поверхности?

28.34. Периметр осевого сечения конуса равен 2. Определите, в каких границах лежит площадь его боковой поверхности.

28.35. Объём конуса равен 36π. Какой угол образует с плоскостью основания образующая его поверхности, когда площадь боковой поверхности наименьшая?

28.36. Найдите площадь поверхности конуса, вписанного в шар радиуса 2, если его основание удалено от центра шара на 1.

28.37. Даны радиусы оснований r и R усечённого конуса и его образующая L. Найдите площадь его боковой поверхности.

28.38. Прикладная геометрия | Лампа имеет абажур в виде боковой поверхности усечённого конуса. Как узнать, сколько материала пошло на абажур?

28.39. Как вычислить площадь поверхности тела вращения, полученного вращением:
1) равностороннего треугольника вокруг: а) высоты; б) стороны; в) прямой, проходящей через вершину и параллельной его высоте; г)* прямой, параллельной его стороне;
2) квадрата вокруг: а) диагонали; б) прямой, проходящей через вершину квадрата и параллельной диагонали;
3) ромба вокруг диагонали;

4) прямоугольника вокруг диагонали;
5) прямоугольной трапеции вокруг: а) наименьшей боковой стороны; б) основания;
6) равнобедренной трапеции вокруг: а) оси симметрии; б) основания; в) боковой стороны?

Задачи к главе V

V.1. Найдите наибольший объём правильной треугольной призмы, периметр боковой грани которой равен 6.

V.2. В правильной треугольной призме расстояние от центра нижнего основания до вершины верхнего основания равно $\sqrt{3}$. Какова должна быть её высота, чтобы объём призмы был наибольшим?

V.3. В прямоугольном параллелепипеде периметр основания равен 6. Найдите наибольший объём параллелепипеда, если его высота равна одной из сторон основания параллелепипеда.

V.4. Найдите наибольший объём правильной четырёхугольной призмы, у которой периметр диагонального сечения равен 6.

V.5. $PABC$ — треугольная пирамида, $(PA) \perp (ABC)$, $\angle ACB = 90°$, $|AC| + |CB| = 18$. Угол между плоскостями PBC и ABC равен 30°. Какой наибольший объём имеет такая пирамида?

V.6. 1) Из конуса радиуса R и высоты H вырезают цилиндр наибольшего объёма. Его основание лежит на основании конуса. Чему равен объём этого цилиндра?
2) Решите такую же, как в 1), задачу, где вместо цилиндра: а) правильная треугольная призма; б) правильная четырёхугольная призма.

V.7. 1) Из шара радиуса R вырезают цилиндр наибольшего объёма. Чему равен этот объём?
2) Решите такую же, как в 1), задачу, где вместо цилиндра: а) конус; б) правильная треугольная призма; в) правильная четырёхугольная призма; г) правильная треугольная пирамида; д) правильная четырёхугольная пирамида.

V.8. В конусе периметр осевого сечения равен 20. Каков должен быть радиус основания конуса, чтобы объём конуса был наибольшим?

V.9. Из данного конуса радиуса 1 и высоты 1 вырезают конус наибольшего объёма. Вершина этого конуса находится в центре основания данного, оси обоих конусов лежат на одной прямой. Каковы размеры полученного конуса?

V.10. а) Найдите наибольший объём правильной треугольной пирамиды, апофема которой равна $2\sqrt{3}$. б) Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а высота может принимать любые значения, принадлежащие промежутку $[1; 3]$. Найдите наибольший объём пирамиды.

V.11. В пирамиде $PABC$ $\angle BAC = 90°$, $(PB) \perp (ABC)$, $|AB| + |PB| = 9$, $|AC| = 2\,|BP|$. Найдите расстояние от P до (AC) в пирамиде, имеющей наибольший объём.

V.12. Основание пирамиды $PABC$ — равнобедренный прямоугольный треугольник, $\angle A = 90°$, $(PA) \perp (ABC)$, $|AB| + |AC| + |AP| = 12$. При каких длинах AB, AC, AP объём пирамиды наибольший?

V.13. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ с периметром 18. Угол между плоскостями ABC и ABC_1 равен 60°. Каков наибольший объём призмы?

V.14. В основании пирамиды $PABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 30°$, $|AC| : |CB| = 1 : 2$, PC — высота пирамиды. Известно, что $|PC| + |AC| + |CB| = 9$. Найдите длину AC, при которой объём пирамиды будет наибольшим.

V.15. В основании пирамиды $PABCD$ — прямоугольник, высота пирамиды — PB. Найдите наибольший объём пирамиды, если её высота равна AB и $AB + BC = 6$.

V.16. В четырёхугольной пирамиде $PABCD$ в основании квадрат, PB — высота, $PC + PB = 8$. Найдите длину PB, при которой объём пирамиды наибольший, зная, что $1 \leqslant PB \leqslant 3$.

V.17. Основание пирамиды $PABCD$ — ромб с острым углом 30° в вершине A, PD — высота пирамиды, $DA + DC + DP = 48$. При каких длинах DA и PD объём пирамиды наибольший?

V.18. В основании пирамиды $PABCD$ — прямоугольник, периметр которого равен 12, $(PB) \perp (ABC)$, угол между гранями PAD и $ABCD$ равен 45°. При какой высоте её объём наибольший?

V.19. Высота прямоугольного параллелепипеда равна 0,5, а площадь основания 9. Найдите наименьшую площадь боковой поверхности параллелепипеда.

Итоги главы V

Основные результаты главы V — вывод трёх **формул для объёмов тел** и трёх **формул для площадей поверхностей**.

• **Объём цилиндра**, в частности призмы, равен произведению площади основания и высоты $\boldsymbol{V = SH}$ (теорема 30 п. 27.1).

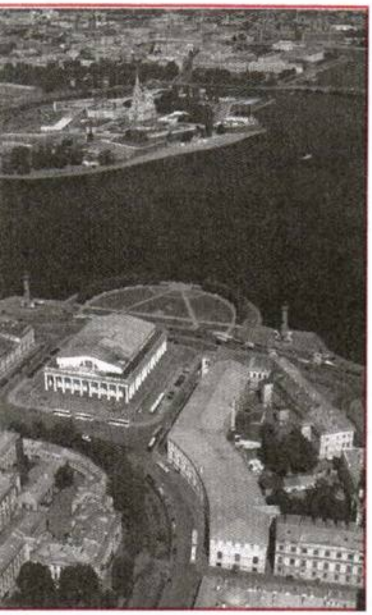
• **Объём конуса**, в частности пирамиды, равен одной трети произведения площади основания и высоты $\boldsymbol{V = \frac{1}{3} SH}$ (теорема 31 п. 27.2).

• **Объём шара** радиуса R выражается формулой $\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \pi R^3}$ (теорема 32 п. 27.3).

• **Площадь сферы** радиуса R выражается формулой $\boldsymbol{S = 4\pi R^2}$ (теорема 33 п. 28.3).

• **Площадь боковой поверхности цилиндра** вращения высотой H и радиусом основания R выражается формулой $\boldsymbol{S_б = 2\pi RH}$ (теорема 34 п. 28.3).

• **Площадь боковой поверхности конуса** вращения с образующей поверхности L и радиусом основания R выражается формулой $\boldsymbol{S_б = \pi RL}$ (теорема 35 п. 28.3).



Глава VI

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

Все теоремы стереометрии, доказанные в предыдущих главах, были известны ещё в Древней Греции, хотя часто при их доказательствах мы пользовались современными методами. В этой главе кратко говорится о таких разделах геометрии, которые были созданы значительно позднее — в XVII—XX вв.

Координаты и векторы уже рассматривались в планиметрии, поэтому в данной главе вам многое будет знакомо.

§ 29 Метод координат

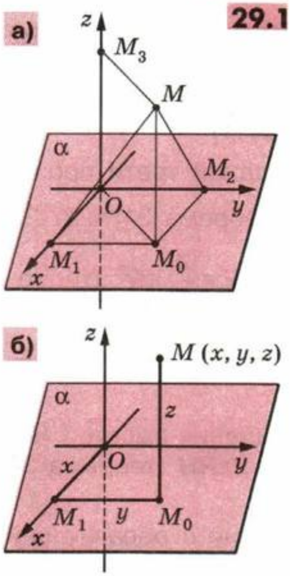


Рис. 254

29.1 **Прямоугольные координаты.** **Координатами** вообще называют числа, определяющие положение точки. Вы знакомы с прямоугольными координатами на плоскости, географическими координатами — широтой и долготой, экваториальными координатами на небесной сфере — склонением и прямым восхождением.

В пространстве к двум координатам присоединяется третья. Самые употребительные координаты в пространстве — прямоугольные.

Возьмём в пространстве три взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в одной точке O (рис. 254, a). На каждой из этих прямых введём координаты с началом O. На одной из этих прямых координату обозначим x, на другой — y, на третьей — z.

Произвольной точке M пространства сопоставим три координаты следующим образом. Точка M проектируется на оси, и за её координаты принимаются координаты её проекций. Итак, координата x точки M — это координата её проекции M_1 на ось x. Аналогично определяются координаты y и z.

Координаты точки записывают вслед за обозначением точки: $M\ (x,\ y,\ z)$.

Нередко точку обозначают просто её координатами: $(x,\ y,\ z)$.

Определённые таким образом координаты называют **прямоугольными**, выбранные прямые — **осями координат**: ось x, ось y, ось z, а проходящие через них плоскости — **плоскостями координат**: плоскость xy, плоскость xz, плоскость yz.

Координаты точки M можно найти и следующим образом.

Построим проекцию M_0 точки M на плоскости xy, а затем проекцию этой точки M_0 на ось x (рис. 254, *б*). Получим точку M_1 (по теореме о трёх перпендикулярах). Длины отрезков OM_1, M_1M_0, M_0M, взятые с должными знаками, дадут последовательно координаты x, y, z точки M.

29.2 Построение точки с данными координатами.

Проведя последнее построение в обратном порядке, можно найти точку с заданными значениями координат: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Находим на оси x точку M_1 с координатой $x = x_0$. Проводим из неё в плоскости xy перпендикуляр M_1M_0 к оси x в сторону, соответствующую знаку y_0, на длину $|y_0|$. Из конца M_0 этого перпендикуляра проводим перпендикуляр к плоскости xy в сторону, соответствующую знаку z_0, на длину $|z_0|$. Конец M этого перпендикуляра и будет иметь координаты x_0, y_0, z_0.

Проведённое построение точки $M\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ показывает, что не только каждой точке отвечают определённые три координаты, но и обратно: каждой тройке чисел, взятых в определённом порядке, соответствует точка с такими координатами.

29.3 Выражение расстояния между точками

Теорема 36. **В прямоугольных координатах расстояние между точками $A\ (x_1, y_1, z_1)$ и $B\ (x_2, y_2, z_2)$ выражается формулой**

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1)$$

Словами: **расстояние между точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей их координат.**

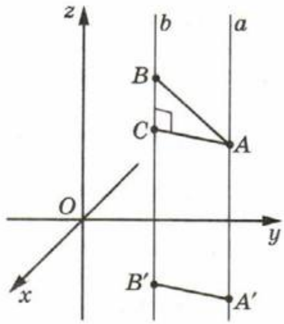


Рис. 255

Доказательство. Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Пусть прямая AB не параллельна хотя бы одной оси, так что она, допустим, не параллельна оси z. Проведём через точки A и B прямые a и b, параллельные оси z и, следовательно, перпендикулярные плоскости xy (рис. 255). Они пересекут эту плоскость в точках A' и B' с координатами x_1, y_1 и x_2, y_2. Как известно из планиметрии, расстояние $A'B'$ равно

$$A'B' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2)$$

Если $z_1 = z_2$, то отрезки AB и $A'B'$ являются противоположными сторонами прямоугольника (или совпадают, когда точки A и B лежат в плоскости xy). В этом случае $z_2 - z_1 = 0$ и $A'B' = AB$. Таким образом, формула (2) и даёт формулу (1).

Допустим, $z_1 \neq z_2$. Параллельные прямые a и b лежат в одной плоскости. Проведём из точки A перпендикуляр AC на прямую b. Получаем прямоугольный треугольник ABC и прямоугольник $AA'B'C$. Тогда $A'B' = AC$ и $BC = |z_2 - z_1|$.

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{A'B'^2 + BC^2}.$$

Подставив сюда значение $A'B'$ из (2) и BC, получим (1). ■

Замечание. Как равенство (2) является записью теоремы Пифагора в координатах, так и равенство (1) является пространственным аналогом теоремы Пифагора, записанным в координатах.

29.4 Метод координат.

▲ Применение координат и алгебраических методов к исследованию геометрических объектов и к решению геометрических задач составляет раздел геометрии, называемый **аналитической геометрией**. Одним из её создателей был знаменитый французский философ и математик Рене Декарт (1596—1650), и прямоугольные координаты часто называют **декартовыми**.

Рене Декарт

Применяя метод координат, можно решать задачи двух видов. Во-первых, задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, можно применять алгебру и анализ к решению геометрических задач, к доказательству теорем. Мы и начали с того, что, введя прямоугольные координаты, выразили через них основную геометрическую величину — расстояние между точками. Это был первый шаг в применении метода координат.

Далее, из формулы (1) вытекает, например, что сфера радиуса R с центром в точке $K(a, b, c)$ задаётся уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (3)$$

(Сравните это уравнение с уравнением окружности на плоскости.)

Во-вторых, пользуясь координатами, можно истолковывать уравнения и неравенства геометрически и таким образом применять геометрию к алгебре и анализу. Графическое изображение функций — первый пример такого применения метода координат.

Через метод координат геометрия и алгебра, соединяясь и взаимодействуя, дают богатые плоды, которые они не могли бы дать, оставаясь разделёнными. ▼

29.5 Применения метода координат*. Начнём с совсем простого примера: выведем уравнение плоскости xy. Она задаётся уравнением $z=0$, так как у каждой точки этой плоскости координата $z=0$, и, наоборот, если у точки координата $z=0$, то она лежит в плоскости xy.

Теперь рассмотрим ещё раз задачу *о взаимном расположении сферы и плоскости* (см. п. 16.3). Можно так выбрать систему координат, что данная плоскость будет координатной плоскостью xy, а центр рассматриваемой сферы лежит на оси z в точке $(0, 0, d)$, $d \geqslant 0$ (рис. 256).

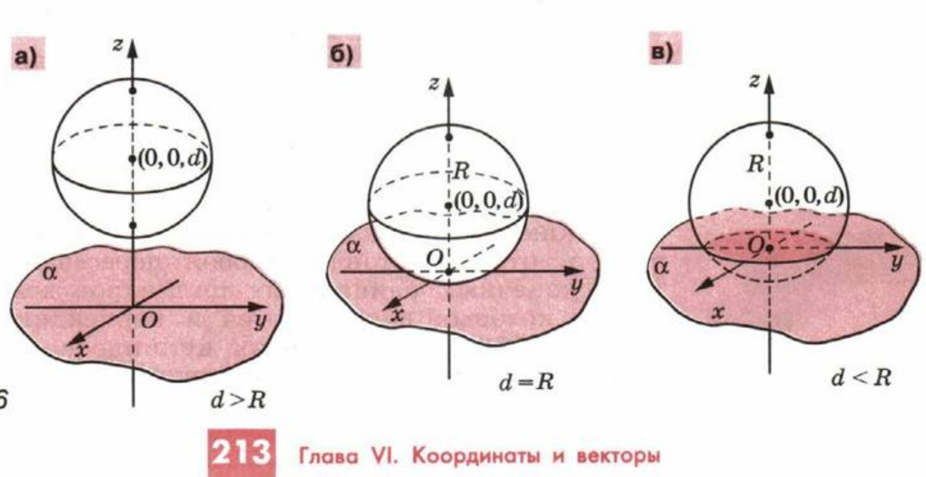


Рис. 256

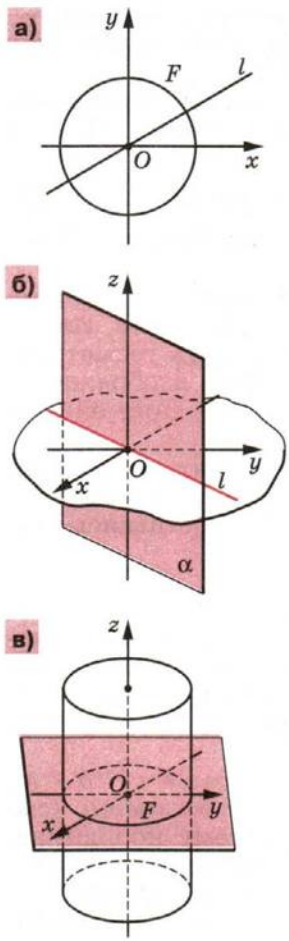


Рис. 257

Тогда плоскость задаётся уравнением $z=0$, сфера — уравнением $x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$, а их пересечение — системой этих уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-d)^2=R^2, \\ z=0 \end{cases} \qquad (4)$$

(поскольку координаты общих точек сферы и плоскости должны удовлетворять обоим уравнениям).

Подставляя $z=0$ в первое уравнение системы, упрощаем её и получаем систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2-d^2, \\ z=0. \end{cases} \qquad (5)$$

Ясно, что при $0 \leqslant d < R$, когда $R^2-d^2>0$, эта система задаёт в плоскости xy окружность радиуса $r=\sqrt{R^2-d^2}$ (рис. 256, *в*).

Если $d=R$, то $x^2+y^2=0$, $z=0$ и плоскость и сфера имеют единственную общую точку (0, 0, 0) (касаются в этой точке, рис. 256, *б*).

Если же $d>R$, то $R^2-d^2<0$ и у сферы и плоскости общих точек нет (рис. 256, *а*).

Часто уравнение, задающее некоторую фигуру в пространстве, содержит не все переменные x, y, z. Например, плоскость xy задаётся уравнением $z=0$. Наоборот, в уравнениях $y=kx$ и $x^2+y^2=r^2$ отсутствует переменная z. Вы знаете, что на координатной плоскости xy эти уравнения задают прямую l и окружность F (рис. 257, *а*). А что эти уравнения задают в пространстве? Уравнение $y=kx$ в пространстве задаёт плоскость α, проходящую через прямую l и перпендикулярную плоскости xy (а значит, содержащую ось z; рис. 257, *б*). А уравнение $x^2+y^2=r^2$ задаёт в пространстве бесконечный цилиндр вращения (рис. 257, *в*). Он образован прямыми, перпендикулярными плоскости xy и пересекающими её в точках окружности F.

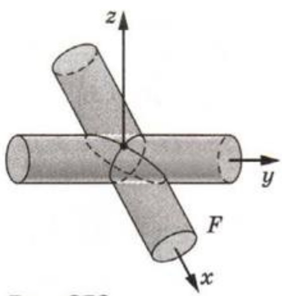


Рис. 258

Зная эти несложные уравнения, уже можно решать задачи, которые обычными геометрическими средствами решить не просто. Например, что представляет собой пересечение двух бесконечных одинаковых цилиндров вращения, оси которых пересекаются и перпендикулярны (рис. 258)? Если оси этих цилиндров — координатные оси x и y, то цилиндры можно задать уравнениями $y^2+z^2=r^2$ и $x^2+z^2=r^2$. Координаты

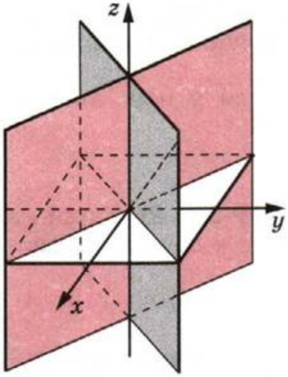


Рис. 259

их общих точек удовлетворяют обоим этим уравнениям, а значит, и вытекающему из них уравнению $x^2 - y^2 = 0$. Уравнение $x^2 - y^2 = 0$ определяет пару плоскостей, заданных уравнениями $y = x$ и $y = -x$ (рис. 259).

Как было сказано в п. 18.4, сечение цилиндра плоскостью является эллипсом. Поэтому два рассматриваемых цилиндра пересекаются по двум эллипсам, лежащим в плоскостях $y = x$ и $y = -x$.

Последняя задача подсказывает, как вырезать заготовку из жести, чтобы сделать, например, «колено» у трубы (см. рис. 253 на с. 207). Дело в том, что при развёртке цилиндра его эллиптическое сечение перейдёт в ... синусоиду! Убедитесь в этом сами.

Вопросы для самоконтроля

1. Сколько координат имеет точка в пространстве?
2. Как найти координаты точки в пространстве?
3. Как построить точку с заданными координатами?
4. Запишите формулу расстояния между двумя точками. Имеет ли значение порядок точек и их координат?
5. Запишите уравнение сферы с центром в начале координат.
6. Какие вы знаете уравнения других фигур в пространстве?
7. Какие задачи можно решать методом координат? Приведите примеры.

Задачи

Задачи к пп. 29.1, 29.2

29.1. Нарисуйте систему координат. Какие координаты равны нулю у точки, лежащей: а) в плоскости *xy*; б) в плоскости *yz*; в) на оси *x*; г) на оси *y*?

29.2. Нарисуйте систему координат и точки $A(1, 1, 0)$, $B(1, 1, 3)$, $C(1, 1, -2)$. а) Каковы координаты проекций точки *B* на оси координат? Нарисуйте проекции точки *B* на плоскости координат. Каковы координаты этих проекций? Чему равны расстояния от *B* до плоскостей, осей и начала координат? Какие углы образует прямая *OB* с плоскостями и с осями координат? **б)** Выполните те же задания для точки *C*. **в)** Какие координаты имеет точка прямой *AB*, удалённая от плоскости *xy* на 5? **г)** Какие координаты имеет точка прямой *AB*, удалённая от точки *O* на 5? **д)** Найдите расстояния от (*AB*) до плоскостей *xz* и *yz*.

29.3. Нарисуйте систему координат и точку $A(0, -1, 1)$. Составьте задачи, аналогичные задаче 29.2, для этой точки. Попытайтесь составить и решить аналогичные задачи в общем виде. Например, задайте точки $A(a, b, 0)$, $B(a, b, c)$, $C(a, b, c)$ и ответьте на те же вопросы, что заданы в задаче 29.2.

29.4. Точки $A(1, 0, 0)$ и $B(-1, 0, 0)$ являются вершинами правильного тетраэдра, основание которого лежит в плоскости xy. Вычислите координаты двух других его вершин.

29.5. Укажите положение точки в системе координат, если у неё: а) $x=0$; б) $x=y=0$; в) $y=0$, $x \neq 0$, $z \neq 0$; г) $y=z=0$, $x \neq 0$.

Задачи к п. 29.3

29.6. Исследуем | Даны точки $A(5, -1, 3)$, $B(1, 2, -6)$, $C(-3, 3, 2)$. Какая из них ближе к началу координат; к плоскости yz; к оси x; к другим координатным плоскостям и осям?

29.7. Вычислите расстояние AB, если: а) $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$; б) $A(-2, 3, -4)$, $B(2, -3, 4)$; в) $A(a, b, c)$, $B(b, c, a)$.

29.8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Пусть точка K — середина AD, точка L — середина C_1D_1, точка M — центр грани ABB_1A_1. Пусть система координат имеет начало в точке B, а оси координат направлены по лучам BA, BC, BB_1. Используя метод координат: а) вычислите расстояния KL, LM; б) докажите, что центр куба равноудалён от всех вершин; от всех рёбер; от центров треугольников, образованных диагоналями граней.

Задачи к п. 29.4

29.9. а) В системе координат нарисуйте плоскость, перпендикулярную оси x и проходящую через точку $(1, 0, 0)$. Возьмите любую точку плоскости и объясните, почему её координата по оси x равна 1. б) Нарисуйте точку $A(-2, 3, -1)$ и плоскость, проходящую через A и перпендикулярную оси x. Каким характерным свойством обладают все точки этой плоскости?

29.10. Напишите уравнения плоскостей, перпендикулярных осям координат и проходящих через точки: а) $(0, 1, 0)$; б) $(1, 1, 0)$; в) $(1, 1, 1)$.

29.11. Напишите уравнение плоскости: а) удалённой на 2 от плоскости xy; б) удалённой на 1 от плоскости $x=3$; в) равноудалённой от двух данных плоскостей $y=1$ и $y=-3$.

29.12. Объясните, почему совместное выполнение двух условий $x=a$ и $y=b$ задаёт в пространственной системе координат прямую. Как она расположена относительно плоскостей и осей координат?

29.13. Какая фигура определяется уравнением: $x^2+y^2+z^2=9$ и условием:

а) $x=0$;	б) $x=1$;	в) $x=2$;
г) $x=3$;	д) $y=-1$;	е) $z=-4$;
ж) $\lvert y \rvert=2$;	з) $\lvert z \rvert=3$;	и) $x+y=1$;
к) $y-z=2$;	л) $z=x^2+y^2$;	м) $x=-2$, $y=-1$?

29.14. Напишите уравнение сферы: а) с центром в начале координат и радиусом 1; б) с центром в точке $(-1, -1, 1)$ и радиусом 1; в) с центром в точке $(a, -a, a)$ и радиусом a; г) проходящей через точки $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1)$ и $(1, -1, 1)$; д) касающейся плоскости yz в точке $(0, 1, 2)$ радиуса 3; е) касающейся всех координатных плоскостей.

Задачи к п. 29.5

29.15. Пусть A и B — две точки пространства. Методом координат докажите, что все точки пространства, равноудалённые от A и B, образуют плоскость.

29.16. Докажите теорему о сечении сферы плоскостью (см. п. 16.2), выбрав начало координат в центре сферы, а одну из осей координат направив перпендикулярно плоскости.

29.17. Покажите методом координат, какой фигурой может быть пересечение двух сфер.

29.18. Пусть α — координатная плоскость xOy, а β — координатная плоскость xOz. Какую фигуру в пространстве образуют все такие точки K, что: а) $|K\alpha| = |K\beta|$; б) $|K\alpha| = 2|K\beta|$; в) $|K\alpha| + |K\beta| = 1$?

§30 Векторы

30.1 **Понятие вектора.** Как вы знаете из физики и планиметрии, **векторными величинами** или, короче, **векторами** называются величины, которые характеризуются не только численным значением при выбранной единице измерения, но и направлением. Численное значение вектора называется его **модулем** или абсолютной величиной. Особый случай представляет **нулевой вектор** — его модуль равен нулю, а направления он не имеет.

Ненулевые векторы изображаются направленными отрезками. Напомним, что **направленным отрезком** называется отрезок, у которого указан порядок концов: первый называется началом, второй — концом. Направленные отрезки также называют векторами.

Вектор с началом A и концом B обозначается $\overrightarrow{AB}$. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ — это длина отрезка AB.

30.2 **Сонаправленность и равенство векторов.** Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ называются **сонаправленными** или **одинаково направленными**, если лучи AB и MN сонаправлены (рис. 260, *а*, *б*). Напомним, что понятие сонаправленности лучей было определено в п. 15.1. Для сонаправленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применяется обозначение $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Из этого определения и сонаправленности двух лучей, сонаправленных с третьим (лемма п. 15.1), вытекает признак сонаправленности векторов: *два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены.*

Ненулевые векторы называются **равными**, если их длины равны и они сонаправлены. Равенство нулевых векторов определяется лишь первым из этих условий.

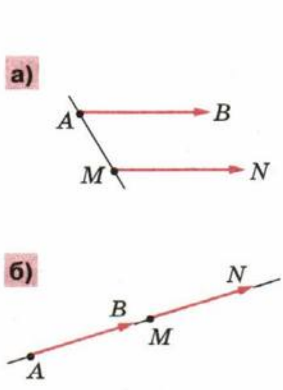
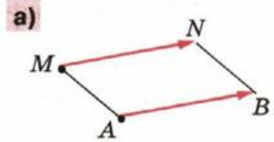


Рис. 260



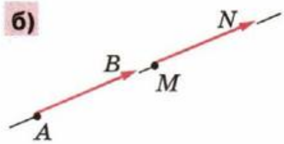


Рис. 261

Итак, равенство $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ означает, что выполняются два условия: 1) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{MN}|$ и 2) $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{MN}$ (рис. 261, *а*, *б*). Второе условие проверяется лишь в случае, когда $|\overrightarrow{AB}|\neq 0$.

Из данного определения и признака сонаправленности векторов следует признак равенства векторов: *два вектора, равные третьему вектору, равны*. Действительно, длины у них равны, а направление у них одно и то же, так как два вектора, сонаправленные с третьим, сонаправлены.

Отложить от данной точки вектор, равный данному, — значит построить направленный отрезок с началом в этой точке, изображающий данный вектор. *От любой точки в пространстве можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.*

Действительно, пусть заданы вектор $\overrightarrow{AB}$ и некоторая точка M. Тогда найдётся единственная точка N, такая, что $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$. Если точка M не лежит на прямой (AB) (см. рис. 261, *а*), то, построив параллелограмм $ABNM$, найдём искомую точку N. Если же точка M лежит на прямой (AB) (см. рис. 261, *б*), то на том луче прямой AB, который имеет начало в точке M и сонаправлен с лучом AB, откладываем отрезок MN, равный отрезку AB. В обоих случаях точка N единственная.

Напомним ещё, что два вектора называются **коллинеарными** (или **параллельными**), если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой. Аналогично определяется параллельность и перпендикулярность векторов прямым и плоскостям. О двух параллельных, но несонаправленных ненулевых векторах говорят, что они **направлены противоположно**. Параллельность, перпендикулярность и противоположная направленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается соответственно так: $\vec{a}\parallel\vec{b}$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{b}$.

30.3 **Сложение векторов.** Как и в планиметрии, сумму двух векторов можно найти по **правилу треугольника** (рис. 262, *а*). А именно если даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то вектор $\vec{a}$ откладываем от любой точки A: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Затем от его конца — точки B — откладываем вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$.

Полученный результат не зависит от выбора точки A. А именно если взять другую точку A_1 и отложить векторы $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}$, то в результате получим вектор $\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 262, *б*).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не параллельны, то их сумму можно получить, пользуясь известным вам **правилом параллелограмма**. Согласно этому правилу надо отложить их от одной точки: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ (рис. 262, *в*). Затем построить на отрезках AB и AD параллелограмм $ABCD$. Вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

Свойства операций сложения векторов в стереометрии те же, что и в планиметрии, и доказываются они точно так же, как в планиметрии. Перечислим эти свойства, сопровождая их рисунками, из которых ясно, как они доказываются.

1. Переместительное свойство, или коммутативность: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ **для любых векторов** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ (рис. 262, *г*).

2. Сочетательное свойство, или ассоциативность: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ **для любых векторов** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 262, *д*).

3. Свойство нуль-вектора: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ **для любого вектора** $\vec{a}$.

4. Существование и единственность противоположного вектора: **для каждого вектора** $\vec{a}$ **существует, и притом единственный, вектор** $-\vec{a}$**, такой, что** $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (рис. 262, *е*).

Вычитание векторов — это операция, обратная сложению векторов. Вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ — значит найти такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даст вектор $\vec{a}$ (рис. 263, *а*). Чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, можно прибавить к вектору $\vec{a}$ вектор $-\vec{b}$ (рис. 263, *б*).

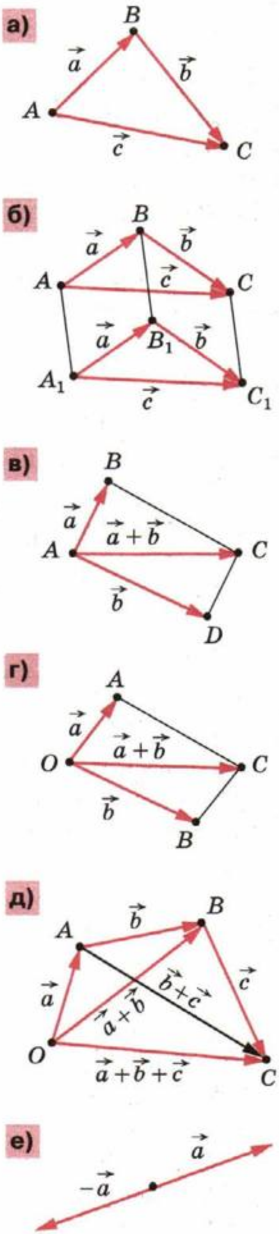


Рис. 262

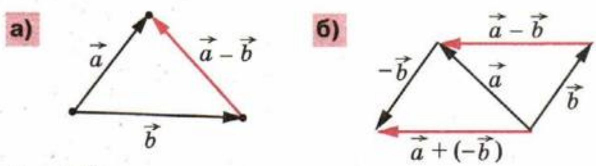


Рис. 263

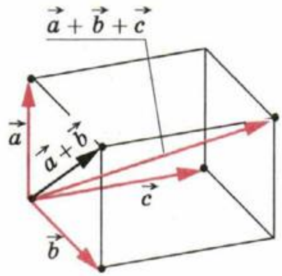


Рис. 264

По правилу параллелограмма сумма двух векторов, непараллельных одной прямой, представляется диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах, отложенных от одной точки.

Аналогично сумма трёх векторов, непараллельных одной плоскости, представляется диагональю параллелепипеда, построенного на данных векторах, отложенных от одной точки, как на рёбрах (рис. 264). Убедитесь в этом.

30.4 **Умножение вектора на число.** Напомним определение умножения вектора на число, данное ещё в планиметрии.

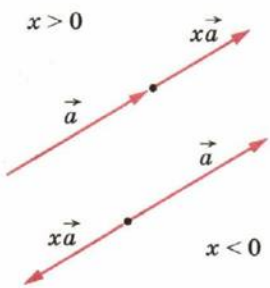


Рис. 265

Пусть даны ненулевой вектор $\vec{a}$ и действительное число $x \neq 0$. **Произведением вектора $\vec{a}$ на число x** называется такой вектор $x\vec{a}$, который, во-первых, имеет длину $|x| \cdot |\vec{a}|$ и, во-вторых, сонаправлен с $\vec{a}$, если $x>0$, и направлен противоположно $\vec{a}$, если $x<0$ (рис. 265). Если же $\vec{a}=\vec{0}$ или $x=0$, то полагают $x\vec{a}=\vec{0}$.

Отметим четыре свойства умножения вектора на число. Они известны из планиметрии и относятся к планиметрии: выполняющиеся в них действия производятся с векторами, лежащими в одной плоскости или на одной прямой, если отложить их от одной точки. Эти свойства выполняются для любых векторов и чисел.

Свойство 1. $\boldsymbol{1 \cdot \vec{a} = \vec{a}}$.

Свойство 2. $\boldsymbol{x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}}$.

Свойство 3. $\boldsymbol{(x+y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}}$.

Свойство 4. $\boldsymbol{x(\vec{a}+\vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}}$.

Напомним характерное свойство коллинеарности векторов, доказанное в курсе планиметрии.

Теорема 37 (о коллинеарных векторах). **Вектор $\vec{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} = x\vec{b}$.**

30.5 **Разложение вектора по базису.** Операции сложения векторов и умножения вектора на число (их называют **линейными**) позволяют дать ответ на такой вопрос: сколько и каких векторов надо задать, чтобы через них можно с помощью линейных операций с векторами однозначно выразить любой вектор на данной прямой, на данной плоскости или в пространстве? Система таких векторов, через которые однозначно выражаются все остальные векторы, называется **базисом** (на прямой, на плоскости или в пространстве). Порядок векторов в этой системе считается заданным.

1. **Базисом на прямой является любой ненулевой вектор.** Это следует из теоремы о коллинеарных векторах (п. 30.4) и свойств умножения вектора на число.

2. **Базисом на плоскости является любая пара неколлинеарных векторов.**

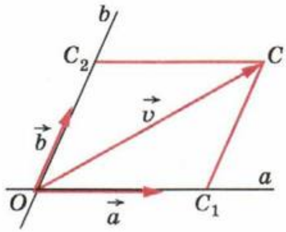


Рис. 266

□ Действительно, пусть даны плоскость α и любые неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим их от некоторой точки O и проведём через них прямые a и b (рис. 266). Возьмём на плоскости α любой вектор $\vec{v}$ и отложим его от точки O: $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$. Пусть точка C не лежит на прямых a и b. Тогда построим параллелограмм OC_1CC_2 и $\vec{v} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}$. По теореме о коллинеарных векторах $\overrightarrow{OC_1} = x\vec{a}$ и $\overrightarrow{OC_2} = y\vec{b}$. Поэтому

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}. \qquad (1)$$

Искомое представление вектора $\vec{v}$ получено. Докажем, что оно единственное. Допустим, что, кроме равенства (1), имеется другое представление вектора $\vec{v}$:

$$\vec{v} = x^*\vec{a} + y^*\vec{b}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $(x^* - x)\,\vec{a} = (y - y^*)\,\vec{b}$, которое возможно для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лишь тогда, когда $x = x^*$ и $y = y^*$.

Если же точка C лежит на a, то в равенстве (1) $y = 0$, а если точка C лежит на b, то в равенстве (1) $x = 0$. ■

Рассмотрим теперь трёхмерный случай. Векторы называются **компланарными**, если существует

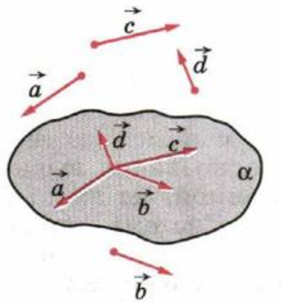


Рис. 267

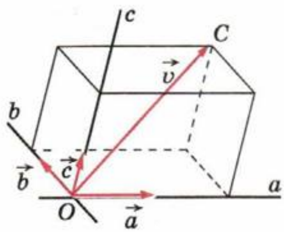


Рис. 268

плоскость, которой параллельны все эти векторы. Если же такой плоскости не существует, то векторы называются **некомпланарными**.

Ясно, что если все компланарные векторы отложить от некоторой точки плоскости, которой они параллельны, то они окажутся лежащими в этой плоскости (рис. 267). Очевидно, *любые два вектора компланарны*. Поэтому некомпланарными могут быть лишь не менее трёх векторов.

3. **Базисом в пространстве является любая тройка некомпланарных векторов.**

Это означает, что какие бы три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ мы ни взяли, любой вектор $\vec{v}$ в пространстве однозначно выражается через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равенством

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}. \qquad (3)$$

Доказательство этого утверждения вполне аналогично двумерному случаю, только вместо параллелограмма строится параллелепипед с диагональю OC, где $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 268). Проведите это доказательство самостоятельно.

30.6 Векторный метод*. Сложение векторов и умножение вектора на число составляют основу **векторной алгебры** — раздела математики, изучающего векторы. Векторная алгебра является одним из основных средств исследования в физике и в разных разделах математики. Например, в векторной форме записываются многие законы физики, в частности законы механики. И в геометрии аппарат векторов позволяет кратко записывать формулировки задач и теорем и их решения. Например, теорема о средней линии KL треугольника ABC в векторной форме записывается так: $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (рис. 269), а её доказательство пишется в одну строку:

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

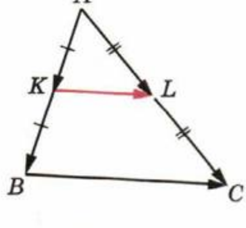


Рис. 269

Проиллюстрируем ещё векторный метод на цикле задач о тетраэдре.

Задача *(о средней линии тетраэдра). Пусть в тетраэдре ABCD точки K и L — середины рёбер AB и CD* (рис. 270). *Отрезок KL*

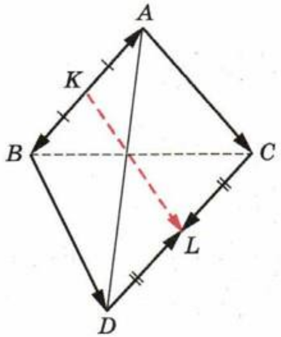


Рис. 270

назовём **средней линией** *тетраэдра. Доказать, что:*

1) *Справедливо равенство*

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right); \qquad (4)$$

2) $KL \leqslant \frac{1}{2}(AC + BD)$;

3) *отрезки* AC, BD, KL *параллельны одной плоскости;*

4) *все средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею пополам;*

5) *через эту точку проходит отрезок* AA_1, *где* A_1 *— центр масс грани* BCD.

Решение. □ 1) Выразим $\overrightarrow{KL}$ двумя равенствами: $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL}$ и $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DL}$. Сложим их и заметим, что $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} = \vec{0}$ (по условию задачи). Получим $2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. Отсюда получаем (4).

2) Переходя в (4) к модулям векторов, получаем:

$$KL = |\overrightarrow{KL}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| \leqslant \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}|\right) = \frac{1}{2}(AC + BD).$$

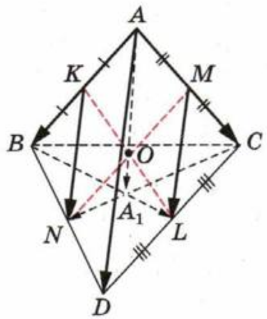


Рис. 271

3) Из равенства (4) следует, что если отложить векторы $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ от одной точки, то они будут лежать в одной плоскости, параллельной скрещивающимся прямым AC и BD. Поэтому отрезки KL, AC и BD параллельны этой плоскости.

4) Пусть точки M и N — середины рёбер AC и BD, а точка O — середина отрезка KL (рис. 271). Тогда KN — средняя линия грани ADB. Поэтому $\overrightarrow{KN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Аналогично $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Тогда

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{LO}$$

и

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Но $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{LO}$. Поэтому $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$, т. е. O — середина отрезка MN.

5) Вычисляем:

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})=$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}).$$

Далее,

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=$$
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}).$$

Итак, $\overrightarrow{AO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$. Значит, точка O лежит на отрезке AA_1 и делит его в отношении $AO:OA_1=3:1$.

Итак, мы доказали, что в точке O пересекаются не только все средние линии тетраэдра, но и все отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центром масс противоположных граней. Она делит эти отрезки в отношении $3:1$. Точка O называется **центром масс тетраэдра.** ■

В заключение отметим два обстоятельства. Во-первых, все проведённые доказательства не зависят от того, лежат точки A, B, C, D в одной плоскости или нет. Поэтому доказанные утверждения верны и для плоского четырёхугольника $ABCD$. Во-вторых, первые два утверждения решённой задачи можно обобщить для отрезка KL, когда точки K и L делят отрезки AB и CD не пополам, а в некотором отношении x, т. е. $AK:KB=CL:LD=x$. Сделайте это обобщение.

Ещё одна задача, потруднее: проследите, по какой линии движется середина отрезка KL, когда x изменяется от 0 до ∞.

▲ Применим ещё векторный метод к доказательству теоремы Менелая (п. 1.6). Напомним первое из двух её взаимно обратных утверждений: **если прямая l не проходит через вершины треугольника ABC и пересекает прямые BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1** (рис. 272), **то**

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1. \qquad (5)$$

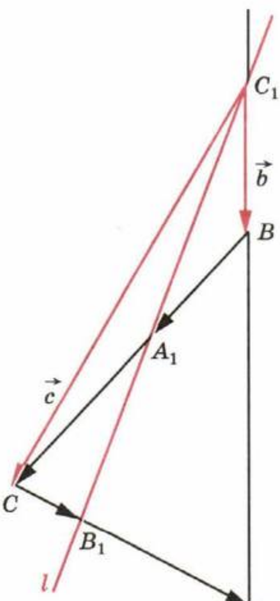


Рис. 272

Положим $\frac{AC_1}{C_1B} = \gamma$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \alpha$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \beta$. Напомним, что числа α, β, γ — это отношения направленных отрезков, а потому

$$\overrightarrow{AC_1} = \gamma\,\overrightarrow{C_1B}, \quad BA_1 = \alpha\,\overrightarrow{A_1C}, \quad \overrightarrow{CB_1} = \beta\,\overrightarrow{B_1A}$$

и для любой точки O

$$(1+\alpha)\,\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OB} + \alpha\,\overrightarrow{OC},$$

$$(1+\beta)\,\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OC} + \beta\,\overrightarrow{OA},$$

$$(1+\gamma)\,\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \gamma\,\overrightarrow{OB}.$$

Выберем два базисных вектора $\vec{b} = \overrightarrow{C_1B}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{C_1C}$ и положим $O = C_1$. Тогда $\overrightarrow{AC_1} = \gamma\vec{b}$,

$$\overrightarrow{C_1A_1} = \frac{(\vec{b} + \alpha\vec{c})}{(1+\alpha)} \tag{6}$$

и

$$\overrightarrow{C_1B_1} = \frac{(\vec{c} - \beta\gamma\vec{b})}{(1+\beta)}. \tag{7}$$

Так как точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{C_1A_1}$ и $\overrightarrow{C_1B_1}$ коллинеарны, а потому $\overrightarrow{C_1A_1} = \lambda\,\overrightarrow{C_1B_1}$. Подставим в это равенство равенства (6) и (7) и перенесём все векторы, коллинеарные $\vec{b}$, налево, а все векторы, коллинеарные $\vec{c}$, направо. Тогда получим, что

$$(1+\beta+\lambda\beta\gamma(1+\alpha))\,\vec{b} = (\lambda(1+\alpha) - \alpha(1+\beta))\,\vec{c}. \tag{8}$$

Поскольку векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны, то стоящие при них в равенстве (8) коэффициенты равны нулю. Равенство нулю коэффициента при векторе $\vec{c}$ даёт выражение для λ:

$$\lambda = \frac{\alpha(1+\beta)}{1+\alpha}.$$

Подставляя это выражение в коэффициент при $\vec{b}$ и приравнивая его к нулю, получаем, что $(1+\beta)(1+\alpha\beta\gamma) = 0$. Так как $\beta \neq -1$, то $\alpha\beta\gamma = -1$, т. е. выполняется равенство (5). Утверждение, обратное доказанному, проверьте самостоятельно. ▼

30.7 **Параллельный перенос.** Слово «вектор» латинское и означает «переносчик». Это соответствует той зависимости, которая связывает векторы и движения, называемые параллельными переносами или, короче, переносами. Переносы в пространстве определяются так же, как на плоскости: **параллельным переносом** фигуры называется такое её преобразование, при котором все её точки перемещаются на один и тот же вектор (т. е. на одно и то же расстояние в одном и том же направлении, рис. 273).

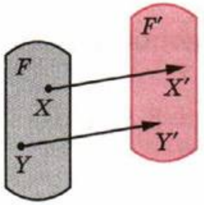


Рис. 273

Таким образом, при переносе каждым двум точкам X и Y фигуры сопоставляются такие точки X' и Y', что

$$\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}. \qquad (9)$$

Параллельный перенос фигуры задаётся переносом одной её точки: если указано, что точка A переходит в точку A', то для любой другой точки X в силу (9) $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'}$. Тем самым перенос задаётся вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$.

Параллельный перенос сохраняет расстояния и направления, т. е. каждым двум точкам X, Y сопоставляются такие точки X', Y', что $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{XY}$.

Действительно, $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{X'X} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YY'} = -\overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{YY'} + \overrightarrow{XY}$. А так как по (9) $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}$, то получаем, что $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{XY}$.

Итак, *параллельный перенос — это движение.*

Оказывается, что любое движение в пространстве можно получить, последовательно выполняя два из трёх рассмотренных нами видов движений: отражение в плоскости, поворот вокруг прямой и перенос. А именно справедлива следующая

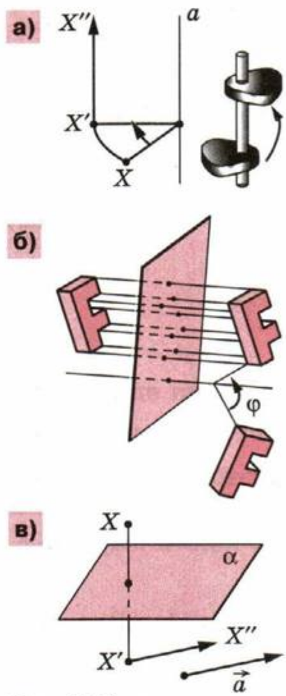


Рис. 274

Теорема *(о классификации движений в пространстве)*: **каждое движение в пространстве можно получить, последовательно выполняя либо поворот вокруг прямой и перенос вдоль этой прямой** (такое движение называется винтовым, рис. 274, *а*), **либо поворот вокруг прямой и отражение в плоскости, перпендикулярной этой прямой** (такое движение называется зеркальным поворотом, рис. 274, *б*), **либо отражение в плоскости и перенос вдоль этой плоскости** (такое движение называется скользящим отражением, рис. 274, *в*).

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое вектор? Что такое модуль вектора?
2. Какие векторы называются коллинеарными, сонаправленными, равными, противоположно направленными?
3. Какие вы знаете признаки коллинеарности, сонаправленности, равенства векторов?
4. Как отложить вектор, равный данному?
5. Как сложить два вектора, три вектора? Какие свойства имеет сложение векторов?
6. Как умножить вектор на число? Какие свойства имеет операция умножения вектора на число?
7. В чём состоит параллельный перенос фигуры?
8. Приведите пример фигуры, которая самосовмещается при переносе.
9. Какие движения теперь вы знаете?

Задачи

Задачи к пп. 30.1, 30.2

30.1. Исследуем. Могут ли равные векторы лежать на разных рёбрах правильного тетраэдра?

30.2. Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Укажите вектор, равный: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{D_1D}$; в) $\overrightarrow{B_1C}$; г) $\overrightarrow{A_1B}$.

2) Отложите вектор, равный $\overrightarrow{C_1D_1}$, от точки: а) B_1; б) A.

3) Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1D}$; б) $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$?

30.3. Исследуем. Какую фигуру образуют концы равных векторов, отложенные от всех точек отрезка? А если вместо отрезка взять плоскую фигуру, что получится?

Задачи к п. 30.3

30.4. Докажите неравенство $|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Обобщите его. Дайте геометрическое истолкование этого обобщения для случая трёх векторов, не лежащих в одной плоскости.

30.5. Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{AX}$, равный:
а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{B_1D_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}$; г) $\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{A_1C}$; д) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}$; е) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{C_1C}$; ж) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{A_1C}$; з) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}$; и) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$; к) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C_1A_1}$.

30.6. Решите задачу 30.5 (а—г), заменив сумму на разность.

30.7. Пусть A и B — любые две точки. Докажите, что при любом выборе точек O_1 и O_2 верно равенство $\overrightarrow{O_1B}-\overrightarrow{O_1A}=\overrightarrow{O_2B}-\overrightarrow{O_2A}$.

30.8. Исследуем. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите такую точку X, что верно равенство $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XB_1}+\overrightarrow{XC_1}+\overrightarrow{XD_1}=\vec{0}$. Единственна ли такая точка? Решите аналогичную задачу для тетраэдра. Как обобщить полученные результаты?

Задачи к пп. 30.4, 30.5

30.9. Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{AX}$, равный: а) $\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$; г) $\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C}$; **д)** $\overrightarrow{AB_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$; **е)** $2\overrightarrow{AA_1}-2\overrightarrow{AC}$; **ж)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$; **з)** $2\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; **и)** $-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{C_1B}$.

30.10. а) Точка K — середина отрезка AB. Докажите, что при любом выборе точки O вектор $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. б) Точка T — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что при любом выборе точки O вектор $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

30.11. Пусть точки K и L не лежат в плоскости ABC. Докажите, что параллельность прямой KL и плоскости ABC равносильна выполнению равенства $\overrightarrow{KL}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

30.12. Используя векторные соотношения, запишите равенства, равносильные таким фактам: а) точка X лежит на прямой AB; б) точка X лежит на отрезке AB; в) точка X принадлежит плоскости ABC.

Задачи к п. 30.6

30.13. $ABCD$ и AB_1CD_1 — два параллелограмма. Докажите, что $BB_1 \parallel DD_1$.

30.14. Исследуем Дан тетраэдр $PABC$. Пусть точки K, L, M и N таковы, что $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$. Каково взаимное расположение прямых KM и NL?

30.15. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что на диагонали B_1D лежат середины других диагоналей параллелепипеда и точки пересечения медиан треугольников A_1C_1B и D_1AC.

30.16. Из вершин A и D правильного тетраэдра $ABCD$ одновременно и с одной скоростью стали двигаться по рёбрам AC и DB точки X и Y. Докажите, что прямая XY всё время параллельна одной и той же плоскости.

§31 Координаты и векторы

31.1 **Координаты вектора.** Чтобы объединить преимущества координатного и векторного методов и расширить круг задач, решаемых этими методами, для векторов вводят координаты. Это позволяет свести действия с векторами к аналогичным действиям с их координатами. Вводят координаты вектора в пространстве так же, как и на плоскости, раскладывая вектор по осям координат следующим образом.

Введём в пространстве систему прямоугольных координат x, y, z с началом в точке O и единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных осей x, y, z (рис. 275). Возьмём произвольный вектор $\vec{a}$ и отложим его от начала координат: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Пусть точка A имеет координаты x_0, y_0, z_0. Спроектируем точку A на плоскость xy в точку $A_0(x_0, y_0, 0)$ и на координатные оси в точки $A_1(x_0, 0, 0)$, $A_2(0, y_0, 0)$ и $A_3(0, 0, z_0)$. Тогда $\overrightarrow{A_1A_0} = \overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA_3}$ и

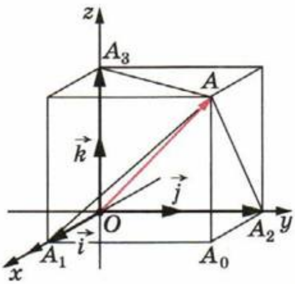


Рис. 275

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_0} + \overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}. \quad (1)$$

Поскольку $\overrightarrow{OA_1} = x_0\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y_0\vec{j}$ и $\overrightarrow{OA_3} = z_0\vec{k}$ (объясните почему), то, подставляя эти равенства в (1), получаем:

$$\vec{a} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}. \quad (2)$$

Итак, мы разложили вектор $\vec{a}$ по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных осей. Числа x_0, y_0, z_0, участвующие в разложении (2), называются **координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат.** Мы показали, что *координатами вектора $\vec{a}$ будут координаты его конца — точки A, если он отложен от начала координат*, т. е. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

Теперь докажем, что в *данной системе координат каждый вектор имеет единственный набор координат*. Это значит, что если, кроме равенства (2), мы получили ещё каким-нибудь способом аналогичное ему равенство

$$\vec{a} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}, \quad (3)$$

то

$$\alpha = x_0,\ \beta = y_0,\ \gamma = z_0. \quad (4)$$

Действительно, из (2) и (3) следует, что

$$x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}.$$

Поэтому

$$(x_0 - \alpha)\vec{i} = (\beta - y_0)\vec{j} + (\gamma - z_0)\vec{k}. \quad (5)$$

Слева в равенстве (5) стоит вектор, параллельный оси x, т. е. перпендикулярный плоскости yz. А справа в (5) стоит вектор, параллельный плоскости yz. Они могут быть равны лишь в случае, когда оба нулевые. Поэтому $x_0 - \alpha = 0$, т. е. $\alpha = x_0$. Аналогично $\beta = y_0$ и $\gamma = z_0$, т. е. имеет место (4).

Следовательно, каждый вектор $\vec{a}$ можно задавать его координатами x_0, y_0, z_0 и писать короче: $\vec{a}(x_0, y_0, z_0)$ или $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$ вместо равенства (2).

Теперь легко найти координаты вектора, отложенного от любой точки, если мы знаем координаты его начала и его конца.

Пусть вектор $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, где $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$. Как было установлено, $\overrightarrow{OP} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\overrightarrow{OQ} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Поэтому $\vec{a} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$, т. е. если $\vec{a} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, то

$$x_0 = x_2 - x_1, \quad y_0 = y_2 - y_1, \quad z_0 = z_2 - z_1. \tag{6}$$

Итак, *координаты вектора, отложенного от произвольной точки, равны разности соответствующих координат его конца и начала.*

Выразим ещё модуль вектора $\vec{a}$ через его координаты. Получим:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= |\overrightarrow{PQ}| = |PQ| = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Выразим также через координаты точек P и Q координаты точки $M(x, y, z)$ — середины отрезка PQ. Так как $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$, то $x - x_1 = x_2 - x$, $y - y_1 = y_2 - y$ и $z - z_1 = z_2 - z$, а потому $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$.

31.2 Действия с векторами и действия с координатами

Теорема 38. **При сложении векторов их соответствующие координаты складываются. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.**

Доказательство. Пусть

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \tag{8}$$

и
$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k},$$
$$\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}, \qquad (9)$$
$$\vec{c} = x_c\vec{i} + y_c\vec{j} + z_c\vec{k}.$$

Надо доказать, что

$$x_c = x_a + x_b, \quad y_c = y_a + y_b, \quad z_c = z_a + z_b. \qquad (10)$$

Действительно, из равенств (8) и (9) получаем, что

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b)\,\vec{i} + (y_a + y_b)\,\vec{j} + (z_a + z_b)\,\vec{k}.$$

Значит, числа $x_a + x_b$, $y_a + y_b$, $z_a + z_b$ — координаты вектора $\vec{c}$, т. е. имеют место равенства (10).

Докажем второе утверждение теоремы. Рассмотрим произведение $\alpha\vec{a}$. Получим

$$\alpha\vec{a} = \alpha\,(x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}) = (\alpha x_a)\,\vec{i} + (\alpha y_a)\,\vec{j} + (\alpha z_a)\,\vec{k}.$$

Значит, числа αx_a, αy_a, αz_a — координаты вектора $\alpha\vec{a}$. ■

Следствие. **Векторы параллельны (коллинеарны) тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.**

Следствие вытекает из доказанной теоремы и признака коллинеарности векторов (п. 30.4).

31.3 Скалярное умножение векторов. Напомним, что **скалярным произведением двух ненулевых векторов** называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Поэтому согласно определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi, \qquad (11)$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Напомним, что **углом между двумя ненулевыми векторами** называется величина образуемого ими угла, когда они отложены от одной точки (рис. 276). Из леммы об углах с сонаправленными сторонами вытекает, что *угол между векторами не зависит от выбора той точки, от которой они откладываются.*

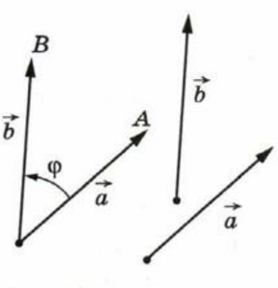


Рис. 276

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ нулевой, то считается по определению, что $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Выделяют два важных частных случая:

1. *Если* $\vec{a} = \vec{b}$, *то* $\varphi = 0°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и из (11) следует, что $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ обозначается $\vec{a}^2$ и называется **скалярным квадратом вектора** $\vec{a}$.

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ *для ненулевых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$. Действительно, в этом случае $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ равносильно тому, что $\cos\varphi = 0$, т. е. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Выразим скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ через координаты. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от начала O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то получим треугольник OAB, угол φ которого при вершине O равен углу между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 277). По теореме косинусов

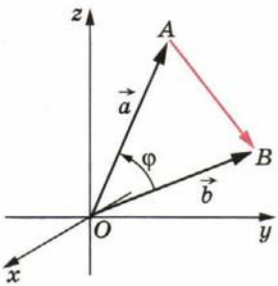


Рис. 277

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\varphi. \qquad (12)$$

Но $OA^2 = |\vec{a}|^2$, $OB^2 = |\vec{b}|^2$, $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2$, $OA \cdot OB\cos\varphi = \vec{a} \cdot \vec{b}$. Поэтому (12) можно записать так:

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}. \qquad (13)$$

Выразим $\vec{a} \cdot \vec{b}$ из (13) и заменим квадраты длин векторов их выражениями через координаты по формуле (7). Получим:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2\right) = \frac{1}{2}\left(x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 + x_b^2 +\right.$$
$$\left.+\, y_b^2 + z_b^2 - (x_b - x_a)^2 - (y_b - y_a)^2 - (z_b - z_a)^2\right) =$$
$$= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.$$

Случай, когда $\vec{a} \parallel \vec{b}$, т. е. когда $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, рассмотрите самостоятельно. Он даёт тот же результат.

Итак, мы доказали, что *скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноимённых координат*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b. \qquad (14)$$

Из формулы (14) вытекают такие свойства:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ **для любых векторов** $\vec{a}$, $\vec{b}$;

2) $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ **для любых векторов** $\vec{a}$, $\vec{b}$ **и любого числа** α;

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}\geqslant 0$ и $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}=\vec{0}$.

Операция скалярного умножения векторов позволяет находить углы между ненулевыми векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad (15)$$

и длины векторов по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}. \qquad (16)$$

Например, зная длины рёбер $a=AD$, $b=AB$ и $c=AA_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и углы между ними $\varphi_1=\angle BAD$, $\varphi_2=\angle A_1AD$ и $\varphi_3=\angle A_1AB$, легко найти длину его диагонали $d=AC_1$. Действительно, $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}$. Возведём это равенство в скалярный квадрат и получим:

$$d^2=a^2+b^2+c^2+2ab\cos\varphi_1+2ac\cos\varphi_2+2bc\cos\varphi_3.$$

Посчитайте квадраты длин других диагоналей параллелепипеда и найдите их сумму. Вы получите любопытный результат.

Другой пример. Воспользовавшись равенством (4) п. 30.6, можно найти длину средней линии KL тетраэдра $ABCD$, если известны длины его рёбер $a=AC$ и $b=BD$ и угол φ между ними: $KL^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab\cos\varphi)$. В частности, если $AC\perp BD$, то $KL=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, а если ещё и $AC=BD$, то $KL=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

31.4 **Уравнение плоскости.** Как вы знаете, в системе прямоугольных координат x, y на плоскости каждая прямая задаётся уравнением вида $ax+by+c=0$. Для плоскости в пространстве верен аналогичный результат: *каждая плоскость α задаётся в системе прямоугольных координат x, y, z уравнением вида*

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (17)$$

Докажем это утверждение. Пусть дана плоскость α. Возьмём любой ненулевой вектор $\vec{n}$,

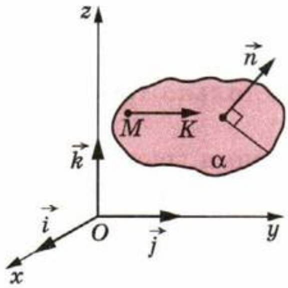


Рис. 278

перпендикулярный плоскости α (рис. 278). Он называется **нормалью** к плоскости α. Обозначим координаты вектора $\vec{n}$ через A, B, C. Покажем, что тогда плоскость α задаётся уравнением (17). Положение плоскости α в пространстве вполне определится, если, кроме вектора $\vec{n}$, задать какую-нибудь точку $M(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$.

Точка $K(x, y, z)$ принадлежит плоскости α тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{MK}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$. А это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MK} = 0. \qquad (18)$$

Равенство (18) и является уравнением плоскости α. Запишем его в координатах. Так как $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM}$, то по формуле (14) получаем, что

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MK} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0). \qquad (19)$$

Подставив это выражение в левую часть уравнения (18) и положив $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, получим равенство (17). ■

Верно и обратное утверждение: *уравнение вида* (17) *при условии, что среди коэффициентов A, B, C есть ненулевые, задаёт в пространстве плоскость в системе прямоугольных координат.* Если $A \neq 0$, то такой плоскостью является плоскость α, проходящая через точку $M\left(-\dfrac{D}{A}, 0, 0\right)$ и имеющая вектор $\vec{n}(A, B, C)$ своим вектором нормали. ■

31.5 Расстояние от точки до плоскости. Решим такую задачу: плоскость α задана уравнением (17) и задана точка $P(x_0, y_0, z_0)$. Требуется найти расстояние d от этой точки до плоскости α. Опустим перпендикуляр PQ на плоскость α. Пусть точка $Q(x_1, y_1, z_1)$ — основание этого перпендикуляра. Тогда расстояние d равно длине вектора $\overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$. Этот вектор коллинеарен вектору нормали к плоскости α — вектору $\vec{N} = (A, B, C)$. Поэтому

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|}. \qquad (20)$$

Вычисляем скалярное произведение

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{N} = Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Поскольку точка $Q(x_1, y_1, z_1)$ лежит на плоскости α, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Поэтому $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$. Следовательно,

$$|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{N}| = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|,$$

а так как $|\vec{N}| = (A^2 + B^2 + C^2)^{0,5}$, то, подставляя эти выражения в равенство (20), получаем, что

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{(A^2 + B^2 + C^2)^{0,5}}. \qquad (21)$$

Вопросы для самоконтроля

1 Как найти координаты вектора?
2 Даны координаты двух векторов. Как сложить эти векторы? Как вычесть их? Как умножить вектор на число? Как проверить, будут ли векторы коллинеарны?
3 Запишите формулу для длины вектора, заданного своими координатами.
4 Как вычислить скалярное произведение двух векторов?
5 Какие свойства имеет скалярное умножение?
6 Какие величины можно находить с помощью скалярного умножения?
7 Каким уравнением задаётся плоскость в прямоугольных координатах? Запишите его.

Задачи

Задачи к п. 31.1

31.1. Какие координаты имеет вектор $\overrightarrow{OA}$, если координаты точки A: а) (1, 2, 3); б) (–5, 4, –1); в) (α, β, γ)?

31.2. Какие координаты имеет единичный вектор (вектор, длина которого равна 1), если он образует: а) с осью x угол 60°, а с осью y угол 45°; б) с плоскостью xy угол 30°, а с плоскостью yz угол 45°; в) с осью z угол 60°, а с плоскостью xz угол 45°; г) с осями координат углы φ_1, φ_2, φ_3?

31.3. Нарисуйте вектор с координатами: а) (0, 0, 1); б) (–2, 0, 1); в) (–3, –1, –2); г) (–4, 1, 3). Вычислите в задачах в) и г) длину такого вектора и углы, которые он образует с осями координат и плоскостями координат.

31.4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Начало координат находится в точке B, положительные лучи осей координат — лучи BA, BC, BB_1. Какие координаты имеет вектор: а) $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{DA}$; д) $\overrightarrow{CD}$; е) $\overrightarrow{A_1C}$?

31.5. Каковы координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длина, если: а) $A(0, 0, 0)$, $B(2, -3, 1)$; б) $A(-1, 1, -1)$, $B(0, -1, 0)$; в) $A(-1, 2, 3)$, $B(-1, 2, -3)$; г) $A(a, b, c)$, $B(c, a, b)$?

31.6. Пусть $A\,(2, 1, 0)$, $B\,(0, -2, 1)$, $C\,(1, 0, -2)$, $D\,(1, 1, 1)$. а) Есть ли равные векторы среди векторов, начала и концы которых находятся в данных точках? б) Чему равны их длины? в) Найдите координаты середин отрезков с концами в точках A, B, C, D.

Задачи к п. 31.2

31.7. а) Дан вектор $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$. Какие координаты имеет вектор $-\vec{a}$? б) Даны векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Какие координаты имеет вектор $\vec{a} - \vec{b}$?

31.8. Даны векторы $\vec{a} = (-2, 1, 0)$ и $\vec{b} = (3, -1, -2)$. Какие координаты имеют векторы: а) $-\vec{b}$; б) $2\vec{a}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; г) $2\vec{a} - 4\vec{b}$; д) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$?

31.9. Вернитесь к условию задачи 31.6. Какие координаты имеют векторы: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$; г) $2\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{CA}$; д) $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{DB}$; е) $-2\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AB}$? Найдите их длины.

31.10. Исследуем Даны точки $A\,(-2, 1, 1)$, $B\,(1, 1, -2)$, $C\,(1, -2, 1)$, $D\,(1, 2, 3)$. Есть ли параллельные прямые, проходящие через эти точки?

Задачи к п. 31.3

31.11. Пусть $\vec{a} = (-1, 2, -3)$, $\vec{b} = (2, -1, 0)$. Вычислите:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(-2\vec{a}) \cdot \vec{b}$; в) $\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{b}$; г) $(-3\vec{a}) \cdot (2\vec{b})$; д) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$; е) $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \vec{a})$; ж) $(-4\vec{a} + \vec{b}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}\right)$.

31.12. Пусть $\vec{a} = (1, -2, 0)$, $\vec{b} = (0, 2, -1)$. Вычислите: а) $|\vec{a}|$; б) $|\vec{b}|$; в) $|2\vec{a}|$; г) $\left|-\frac{1}{2}\vec{b}\right|$; д) $|\vec{a} + \vec{b}|$; е) $|2\vec{a} - \vec{b}|$.

31.13. Пусть $\vec{a} = (0, 1, -2)$, $\vec{b} = (-2, 1, -1)$. Вычислите угол φ между: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $-2\vec{a}$ и $3\vec{b}$; в) $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$.

31.14. Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярны. Какой зависимостью связаны их координаты?

31.15. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ единичные, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°, между $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен 45°, между $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равен 60°. Вычислите: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$; б) $2\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{b} \cdot 4\vec{c}$; в) $\vec{a}\,(\vec{b} - \vec{c})$; г) $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a}$; д) $(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})$; е) $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$; ж) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$.

31.16. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1. Вычислите: а) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BK}$, где K — центр грани ACD; д)* $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{LM}$, где L — середина ребра AC, а M — середина ребра BD.

31.17. Дан тетраэдр $PABC$. Докажите, что равносильны два утверждения: $AB \perp PC$ и $AC^2 + BP^2 = AP^2 + BC^2$.

31.18. Используя скалярное умножение векторов, докажите: а) теорему о трёх перпендикулярах; б) признак перпендикулярности прямой и плоскости; в)* теорему о том, что два перпендикуляра к одной плоскости параллельны.

Задачи к п. 31.4

31.19. Нарисуйте в системе координат плоскость, уравнение которой: а) $x+y+z=1$; б) $-x-y+z=2$; в) $2x-y+3z+1=0$.

31.20. Исследуем | Как будет расположена плоскость относительно осей координат, если в её уравнении будет равен нулю: а) ровно один коэффициент; б) ровно два коэффициента?

31.21. Исследуем | Пересекаются ли плоскости: а) $x+y+z=1$ и $x+y+z=-1$; б) $x+y+z=1$ и $x+y-z=1$?

31.22*. Две плоскости заданы уравнениями. Как выяснить, будут ли они перпендикулярны? Если нет, то как найти угол между ними? А когда плоскости параллельны?

31.23. Какую фигуру в пространстве задаёт неравенство: а) $Ax+By+Cz+D\geqslant 0$; б) $Ax+By+Cz+D\leqslant 0$?

31.24. Какая фигура в пространстве задана условиями: а) $|x|\leqslant 1$; б) $-1\leqslant x-y\leqslant 2$; в) $10\leqslant x+y+z\leqslant 20$; г) $1\leqslant x\leqslant 2$, $-2\leqslant y\leqslant -1$, $-1\leqslant z\leqslant 1$; д) $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $x+y+z\leqslant 1$?

31.25*. Исследуем | В тетраэдре $ABCD$ все углы при вершине A прямые, $AB=AC=AD$. Установите положение центра шара, описанного около этого тетраэдра, относительно плоскости BCD.

Задачи к главе VI

Применяем компьютер

VI.1. Дан прямой угол. В нём движется точка X так, что сумма расстояний от неё до сторон угла постоянна. Какова траектория точки X?

VI.2. Пусть один из концов отрезка фиксирован, другой перемещается по некоторой прямой. Найдите траекторию середины этого отрезка.

VI.3. Прямая пересекает стороны данного угла и движется параллельно самой себе. По какой траектории движется середина отрезка этой прямой, концы которого лежат на сторонах данного угла?

VI.4. На плоскости задан отрезок AB. Каково на этой плоскости множество точек T, таких, что $TA:TB=2:1$? А в пространстве?

VI.5. Дан отрезок AB. Отрезки AC и BD перпендикулярны ему и находятся с одной стороны от AB. Известны длины AC и BD: $AC=a$, $BD=b$. Проведены отрезки AD и BC. Пусть они пересекаются в точке P. Из точки P проведён перпендикуляр PQ на AB. Можно ли найти длину отрезка PQ?

VI.6. Каким должно быть расположение трёх векторов, чтобы их сумма равнялась нуль-вектору?

VI.7. Задана плоская замкнутая ломаная $ABCDA$. Можно ли из векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ и $\vec{d}=\overrightarrow{CA}$ построить замкнутую выпуклую ломаную? Возможно ли это для n-звенной замкнутой ломаной?

Заключение. Современная геометрия

1 Коренное отличие современной геометрии.

До середины XIX в. геометрия изучала фигуры одного-единственного пространства. Элементы её вы изучили в школьном курсе. Теперь же геометрия охватывает «геометрии» бесконечного множества разных воображаемых пространств, она изучает свойства самих пространств и фигур в них. В отличие от всех прочих пространств то пространство, геометрию которого мы изучали, называют трёхмерным евклидовым пространством. Наряду с ним мыслятся теперь и изучаются пространства любого числа измерений — евклидовы и неевклидовы. Что же представляют собой эти пространства, как их определяют, каков их реальный смысл?

Трёхмерное евклидово пространство можно определить как такое множество, элементы которого называются точками и в котором выполняются пять аксиом, сформулированных в § 1.

Точно так же можно определить любое другое пространство: это множество каких-то элементов — «точек», удовлетворяющее соответствующим аксиомам. Какие берутся аксиомы, такое и определяется пространство.

Например, **метрическим пространством** называется множество, в котором каждой паре элементов (точек) X, Y отнесено число — расстояние $|XY|$ с известными условиями: 1) $|XY|=0$ тогда и только тогда, когда $X=Y$; 2) $|XY|=|YX|$; 3) $|XY|+|YZ| \geqslant |XZ|$. Это аксиомы метрического пространства.

Примером метрического пространства является множество непрерывных функций, заданных на отрезке [0, 1], если расстояние между двумя функциями f, g определить равенством

$$|fg| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Итак, пространство в современной математике определяется как множество каких-либо элементов — «точек», наделённое теми или иными свойствами, по которым оно более или менее сходно с обычным пространством. Свойства его задаются теми или иными аксиомами.

Это общее понятие пространства сложилось в начале XX в. в итоге развития геометрии и математики в целом. Рассмотрим простейшие примеры пространств с их геометриями, их реальный смысл и значение.

2 **Геометрия на поверхности.** Планиметрия — это геометрия на плоскости, и, занимаясь ею, рассматривают плоскость саму по себе, отвлекаясь от окружающего пространства. Точно так же можно изучать геометрию на любой поверхности.

Представим себе какую-либо поверхность. Будем измерять **расстояние между её точками по самой поверхности** — по кратчайшей линии от одной точки до другой (рис. 279, *а*). Такие линии играют на поверхности роль прямолинейных отрезков, их называют **кратчайшими**. Теперь можно, например, определить **треугольник на поверхности** как фигуру из трёх кратчайших AB, BC, CA (не имеющих других общих точек, кроме концов) или как часть поверхности, ограниченную такими кратчайшими (рис. 279, *б*). Далее можно определить **окружность на поверхности** с центром O и радиусом r как множество точек на поверхности, удалённых от O на расстояние r (рис. 279, *в*). Затем можно определить углы между кривыми на поверхности и т. д.

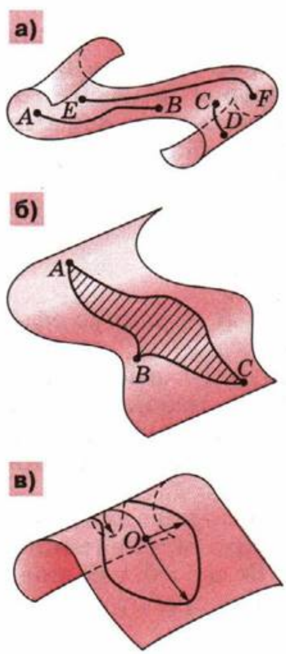


Рис. 279

В общем, возникает возможность развивать геометрию на данной поверхности. Эта геометрия на поверхности называется её **внутренней геометрией.** Поверхность в смысле её внутренней геометрии представляет собой метрическое пространство.

Самый простой и самый важный пример геометрии на поверхности, не считая плоскости, представляет геометрия на сфере. Поверхность Земли является в довольно хорошем приближении сферой, поэтому здесь речь идёт практически о геометрии на Земле, рассматриваемой в больших масштабах. Над Землёй простирается «небесная сфера», та воображаемая сфера, на которой нам представляются движения небесных светил. Следовательно, их взаимное расположение подчиняется геометрии на сфере, или, как её ещё называют,

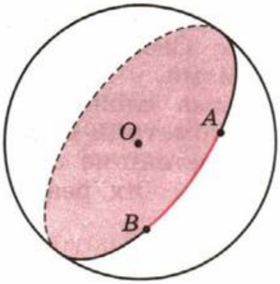


Рис. 280

сферической геометрии. Она составляет геометрическую основу наблюдательной астрономии. Именно поэтому начала сферической геометрии были разработаны ещё греческими геометрами.

На сфере кратчайшими линиями являются дуги больших окружностей (рис. 280). В частности, дуга большой окружности короче дуги параллели (отличной от экватора). Поэтому при дальних полётах и дальних плаваниях, если возможно, летят или плывут не по параллели, а по дуге большой окружности. Например, кратчайший полёт из Москвы в Хабаровск проходит над севером Сибири.

Между геометрией на сфере и геометрией на плоскости много общего. На сфере также выполняются теоремы о равенстве треугольников, о равнобедренном треугольнике и т. д. Главное, что на сфере возможно свободное движение фигур в такой же степени, как на плоскости. С другой стороны, соотношения между сторонами и углами треугольников на сфере другие, чем на плоскости. Так, сумма углов α, β, γ сферического треугольника больше π, а именно

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\frac{S}{R^2},$$

где S — площадь треугольника, а R — радиус сферы.

Карл Гаусс

Сфера геометрически однородна: геометрия её в одной её части такая же, как в любой другой. Но другие поверхности, вообще говоря, геометрически неоднородны, и их внутренняя геометрия может быть очень разнообразной.

Основы внутренней геометрии поверхностей были созданы великим немецким математиком Карлом Гауссом (1777—1855). Более общий подход и более общая теория были разработаны советскими геометрами в середине XX в.

3 Возможная геометрия реального пространства.

Внутреннюю геометрию поверхности можно понимать как такую, которую развивали бы люди, живущие в самой этой поверхности.

В самом деле, представим себе какую-нибудь поверхность и живущих в ней разумных существ, не имеющих никакого понятия об окружающем пространстве. Они могли бы измерять расстояния на поверхности (рис. 281), проводить кратчайшие и делать другие построения и измерения. В общем, они создали бы свою геометрию, отражающую свойства поверхности, в которой они живут. Это и была бы внутренняя геометрия данной поверхности. Вместе с тем это была бы геометрия того «пространства», в котором они живут, потому что вне его для них ничего нет.

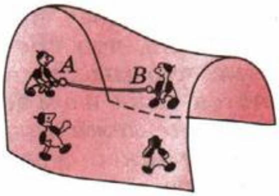


Рис. 281

Мы живём в своём трёхмерном пространстве, измеряем в нём длины, находим геометрические соотношения, делаем построения. Всё это на самом деле, в нашей материальной деятельности. В ней люди обнаружили общие закономерности, выраженные потом в отвлечённой идеализированной форме в евклидовой геометрии. Но почему мы должны быть убеждены, что она абсолютно точно соответствует действительности? Например, а вдруг теорема Пифагора выполняется только приближённо или длина окружности не в точности пропорциональна радиусу? И если в пределах обычного земного опыта эти отличия ничтожны, то почему бы они не могли обнаружиться в звёздных масштабах?

Таких вопросов не задавал никто, они могли казаться нелепыми и невозможными, пока их не задали себе в начале XIX в. независимо друг от друга два великих математика К. Гаусс и Н. И. Лобачевский. Попытки обнаружить отклонения от евклидовой геометрии не дали тогда никакого результата. Но сто лет спустя их догадки оправдались: теперь точно установлено, что в космических масштабах геометрия реального пространства несколько отлична от евклидовой.

4 **Геометрия Лобачевского.** Среди аксиом Евклида была аксиома о параллельных. От других аксиом она отличалась своей сложностью: в принятой теперь формулировке она говорит о всей бесконечной прямой, не пересекающей данную, а в формулировке самого Евклида была гораздо сложнее остальных. Поэтому возникли попытки вывести её из остальных предпосылок геометрии. Этим занимались на протяжении более 2000 лет многие математики, но всё напрасно. Некоторым казалось, что они достигли цели, но потом выяснялось, что они лишь заменяли аксиому Евклида другой равносильной аксиомой. Пытались дока-

Николай Иванович Лобачевский

Янош Бойаи

Бернхард Риман

зать аксиому параллельных методом от противного: прийти к противоречию, предполагая противоположное ей утверждение. Но противоречие не получалось.

Наконец в начале XIX в. одновременно у нескольких математиков возникла мысль, что противоречия и не может получиться, что мыслима геометрия, в которой выполняется аксиома: *на плоскости через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную.*

Первым выступил с этой идеей Н. И. Лобачевский (1792—1856). В 1826 г. он сделал об этом доклад в Казанском университете (где он учился и работал всю жизнь). В 1829—1830 гг. вышла его первая обширная работа, посвящённая новой геометрии.

В 1832 г. была опубликована работа венгерского математика Яноша Бойаи (1802—1860) с теми же, в общем, результатами.

К. Гаусс, придя одновременно к тем же выводам, не решился их опубликовать, опасаясь, как он сам объяснял, быть непонятым и подвергнуться нападкам. Опасения были справедливыми. Лобачевский и Бойаи остались непонятыми почти всеми математиками того времени. Лобачевский подвергался насмешкам, однако он имел силу убеждения и мужество развивать новую геометрию и публиковать всё более развёрнутые её изложения. Когда же после его смерти она была наконец понята, её во всём мире стали называть геометрией Лобачевского, а самого Лобачевского даже сравнивали с Коперником, и справедливо, потому что Николай Иванович Лобачевский произвёл в геометрии величайший переворот. До него веками без тени сомнения считалось, что мыслима только одна геометрия — та, основы которой изложены у Евклида. А Лобачевский опрокинул это всеобщее убеждение: наряду с евклидовой геометрией он построил другую — неевклидову.

Во второй половине XIX в. были найдены простые модели геометрии Лобачевского на плоскости и в пространстве. Выяснилось, что ничего невообразимого и невозможного в ней нет; нужно только правильно её понять. Тогда же она была включена в более общую геометрическую теорию, созданную немецким математиком Бернхардом Риманом (1826—1866).

5 Многомерное пространство.

Многомерное пространство. Идея пространства с числом измерения больше трёх зародилась ещё до XIX в., но основы геометрии таких пространств были созданы к середине XIX в.

В прямоугольных координатах в обычном пространстве точка задаётся тремя координатами. Представим себе точки, задаваемые каждая n координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Между ними можно определить расстояние так же, как в обычном пространстве:

$$|XY| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Так получается «n-мерное евклидово пространство». Его геометрия аналогична обычной стереометрии — геометрии трёхмерного евклидова пространства. Можно определять расстояния иначе, и тогда будут получаться другие n-мерные пространства.

6 Другие геометрии.

Другие геометрии. В геометрии определились и другие её части, основанные на особых свойствах фигур. Например, при параллельном проектировании с одной плоскости на другую длины, вообще говоря, изменяются, но параллельные прямые переходят в параллельные, отношения параллельных отрезков сохраняются, а вместе с ними сохраняются все зависящие от них свойства фигур. Учение об этих свойствах выделяется в особую область, называемую **аффинной геометрией.**

При центральном проектировании (проектировании из точки) параллельность не сохраняется, но прямые переходят в прямые и сохраняются связанные с этим свойства фигур. Такие свойства называют проективными. Учение о них образует **проективную геометрию.** Она лежит в основе изображения фигур в перспективе.

До этого шла речь о параллельном и центральном проектировании с плоскости на плоскость и соответственно об аффинной и проективной геометрии плоскости. Но можно их обобщить на пространство, и притом любого числа измерений. К аффинной геометрии относятся те свойства фигур, которые сохраняются при преобразованиях, переводящих прямые в прямые и, в частности, параллельные в параллельные. К проективной геометрии относятся свойства, сохраняющиеся при преобразованиях, переводящих прямые в прямые без условия сохранения параллельности.

7 Основания геометрии. Если какое-либо пространство определяется аксиомами, то обязательно возникает вопрос: возможно ли такое пространство, нет ли в принятых аксиомах противоречий?

В отношении евклидова пространства такой вопрос не возникал, потому что оно представлялось уже данным и дело шло о его изучении. Но когда Лобачевский заменил аксиому параллельных на противоположную, вопрос возник со всей остротой: а нет ли тут противоречия, возможна ли, в самом деле, неевклидова геометрия? Вопрос был решён положительно предъявлением соответствующей модели; первую дали поверхности, внутренняя геометрия которых совпадает с геометрией Лобачевского (в области).

Давид Гильберт

Итак, первое, обязательное условие для любой системы аксиом — это **непротиворечивость**. Она доказывается предъявлением модели, в которой реализуются данные аксиомы.

Второе условие — **полнота** — состоит в том, чтобы аксиомы действительно давали основание, соответствующее теории, т. е. чтобы все свойства того пространства или тех пространств, которые рассматриваются в теории, вытекали из аксиом, а не домысливались.

У Евклида и всех геометров до конца прошлого века многое подразумевалось как само собой понятное, например свойства расположения точек на прямой и плоскости, что точка разбивает прямую на два луча, что из трёх точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими, что прямая разбивает плоскость. Тогда не возникало мысли выразить это явно в аксиомах. Это стали делать лишь к концу XIX в., и в 1899 г. немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943) дал полную с современной точки зрения систему аксиом евклидовой геометрии.

У него уже ничего не подразумевается, кроме основных логических понятий. Его «Основания геометрии» начинаются словами: «Мы мыслим три вида вещей, которые называются точками, прямыми, плоскостями». Тут ничего не подразумевается, кроме самого общего понятия «вещь», как то, что обозначается в языке именем существительным. Дальше называются основные отношения, такие, как «точка лежит на прямой» и др., и опять ничего не подразумевается, кроме общего понятия отношения. Свойства отношений явно формулируются в аксиомах, и наглядный их смысл совершенно не подразумевается.

Система аксиом Гильберта была потом ещё усовершенствована, и были даны другие системы аксиом в том же строгом духе.

Третий вопрос — о **независимости аксиом**: нет ли среди них лишних, которые можно было бы вывести из других? Это требование у Гильберта сначала ещё не было полностью выполнено, его систему довели до совершенства позже.

Теперь имеется непротиворечивая полная система независимых аксиом евклидовой геометрии, в которой подразумеваются только основные логические понятия.

В современной геометрии та или иная система аксиом определяет, как правило, не одно-единственное пространство, а класс пространств, например метрические пространства. Здесь полноты системы аксиом заведомо нет, к ней можно добавлять новые аксиомы, выделяя другие классы пространств. Так, из всех метрических пространств можно выделить евклидовы, а из них — трёхмерное евклидово пространство.

8 **Геометрия и действительность.** Отношение геометрии к опыту, к данной в нём реальной действительности сложно.

Геометрия возникла как практическая опытная наука о пространственных формах и отношениях реальных тел. Она явилась, можно сказать, первой главой физики; за ней следовала как вторая глава — механика — наука о движении тел; геометрия изучает взаимное расположение тел, механика — их изменение.

Однако геометрия постепенно отделилась от опыта, её предмет составили уже не реальные, а идеальные фигуры. Обращение к опыту, даже к чертежу, было исключено из её аргументов; доказательство теоремы даётся только путём рассуждений. Это понятно: с идеальными фигурами нельзя ставить опыты, их нельзя ни сделать, ни нарисовать, их можно только мыслить.

Евклидова геометрия сложилась, таким образом, как наука об идеальных фигурах. Вместе с тем казалось, что она абсолютно точно соответствует свойствам реального пространства — реальным пространственным отношениям. Однако это убеждение было подвергнуто сомнению Лобачевским и Гауссом и опровергнуто современной физикой — её выводами из теории относительности Эйнштейна. Евклидова геометрия, возникнув из опыта и отделившись от него в своей идеальной точности, пришла с ним хотя бы в некоторое несоответствие. Но это ничуть не затронуло её как часть чистой математики, потому что в этом смысле она представляет собой систему логических выводов из аксиом независимо от их возможного отношения к действительности.

Произошло раздвоение единой геометрии на чисто математическую геометрию с её единственным условием логической точности и на геометрию как физическую теорию, как учение о свойствах реального пространства, сверяемое с опытом, что присуще всякой физической теории. Эту геометрию реального пространства в космических масштабах использует космология, основанная на теории относительности и известных данных о строении Вселенной.

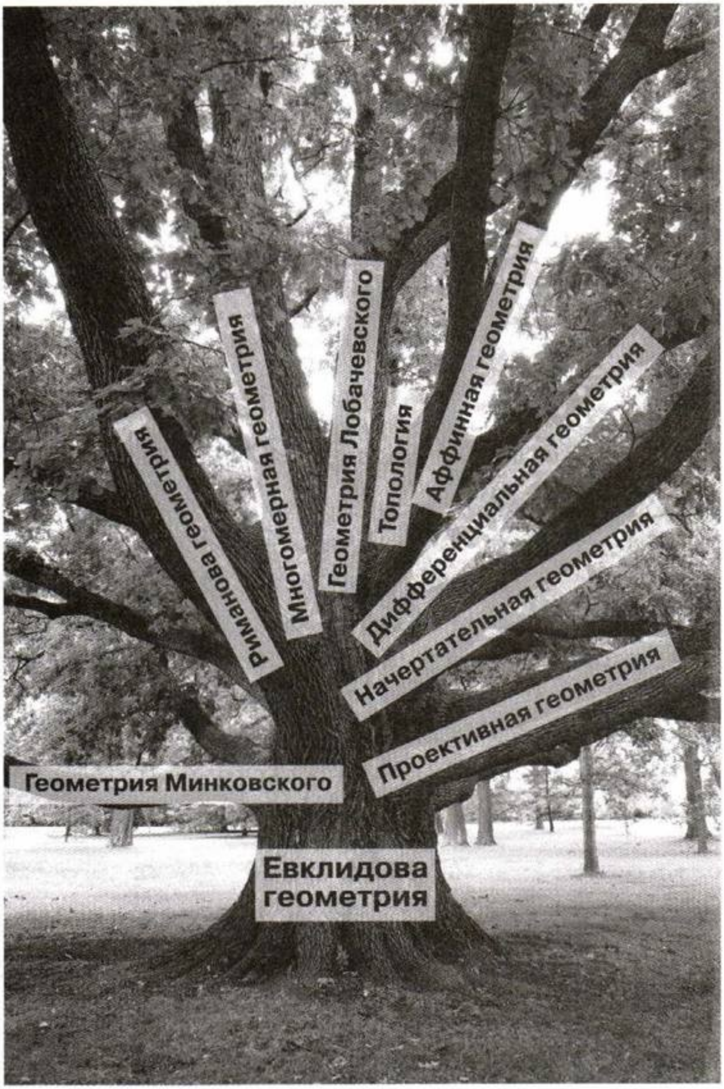
Во всём этом есть как бы противоречие: идеально точная евклидова геометрия оказалась неточной. Возникнув ещё в древности как опытная наука, она превратилась в собственную противоположность — в науку, которая не заботится о соответствии с опытом. Такие реальные противоречия, такое раздвоение единого охватываются общим понятием диалектики.

Так, в истории науки единая геометрия раздвоилась на противоречивые части, разошедшиеся в чистую математику и физику.

Сочетание двух взаимно противоположных сторон геометрии проходило через весь наш курс с самого начала. Мы постоянно ссылались на опыт и вместе с тем старались вести строго логические выводы из аксиом без ссылок на опыт, чертежи и пр.

Самый яркий пример применения отвлечённой геометрии — это общая теория относительности, математическим аппаратом которой послужила общая теория пространств. Начала этой теории за шестьдесят с лишним лет до создания общей теории относительности были заложены Риманом. Выросшая на почве математических абстракций, теория вернулась к исходной геометрической действительности как орудие её более глубокого познания.

Движение познания бесконечно...



Ответы

Глава 1

1.14. б) $1{,}2\sqrt{2}$. **1.26.** От 0 до $\sqrt{3}:4$. **1.27.** $q(p+q)/p^2$, $p(p+q)/q^2$. **2.7.** а) $9\sqrt{2}:4$; б) $9\sqrt{11}:16$; в) $9\sqrt{3}:16$.

Глава 2

9.3. а) $\sqrt{6}:3$; б) $\sqrt{69}:3$; в) $\sqrt{3}:3$; г) $\sqrt{\dfrac{1+2\cos\varphi}{3}}$; д) $\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi-\dfrac{1}{3}}$. **9.4.** а) $\sqrt{21}:3$; б) 3; в) $2\sqrt{3}:3$, 1; г) $\sqrt{\dfrac{3}{1+2\cos\varphi}}$ и $2\sin\dfrac{\varphi}{2}\sqrt{\dfrac{3}{1+2\cos\varphi}}$. **9.5.** а) $\sqrt{2}:2$; б) $\sqrt{14}:2$; в) $d\sqrt{\cos\varphi}\,/\,2\sin\dfrac{\varphi}{2}$. **9.6.** а) $\sqrt{6}:2$; б) $\sqrt{6}$; в) $\sqrt{2}$; г) $2\sin\dfrac{\varphi}{2}/\sqrt{\cos\varphi}$ и $1/\sqrt{\cos\varphi}$. **10.9.** а) $90°-\varphi$; б) $\sin\varphi$, $\cos\varphi$. **10.10.** $180°-2\varphi$. **10.11.** а) 45°; б) 90°; в) $\cos\varphi=\dfrac{1}{3}$. **10.12.** а) $\cos\varphi=\dfrac{1}{3}$; б) 60°. **10.21.** 3) а) 45°; б) 45°; в) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; 4) $\cos\varphi=\dfrac{1}{3}$. **13.14.** а) 3; б) $\sqrt{6}$; в) $\sqrt{3}$. **13.23.** $\sqrt{3}:2$, $\sqrt{7}:2$, $\sqrt{15}:2$. **13.27.** а) от 1 до 3; б) от 0 до 3. **13.30.** а) 1; б) $\sqrt{2}:2$; в) $\sqrt{2}:2$; г) 1; д) $\sqrt{2}:4$; е) $\sqrt{2}:2$; ж) 1; з) 0,5; и) $\sqrt{2}:4$; к) $\sqrt{2}:4$. **13.32.** $a^2/4\cos\alpha$, $a^2\sqrt{3}/12\cos\alpha$. **13.33.** а) $4S\cos\alpha$, $2\sqrt{S\cos\alpha}$, $3S\cos\alpha$, $2\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}$. **13.34.** Один из тангенсов равен $a\sqrt{b^2+c^2}/bc$. **14.4.** а) 1; б) от 0 до 1. **14.8.** а) 0,5. **14.9.** а) $2\sqrt{6}:3$. **14.10.** а) $\sqrt{6}:3$; б) $2\sqrt{6}:3$; в) $\sqrt{6}$. **14.11.** а) 1. **14.12.** а) От 0 до 2; б) от 1 до 3; в) от 0 до 1,5. **14.14.** а) 2; б) 1; в) $3\sqrt{205}:41$. **14.15.** а) 2; б) $\sqrt{3}:2$; в) $\sqrt{3}:6$. **14.16.** От 0 до 1. **14.17.** От 0 до 0,5. **14.19.** а) 1; б) 1; в) $\sqrt{2}:2$; г) $\sqrt{3}:3$; д) $\sqrt{6}:6$. **15.4.** а) 90°; б) 90°; в) 45°; г) 45°; д) 90°; е) 90°; ж) $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; з) — к) $\cos\varphi=-\sqrt{3}:3$. **15.18.** а) 45°; б) $\sin\varphi=\sqrt{3}:3$; в) 45°. **15.19.** 1) а) 0°, 45°; б) $\operatorname{ctg}\varphi=\sqrt{2}$. 2) а) 30°; б) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$. 3) а) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; б) $\sin\varphi=\dfrac{1}{3}$. **15.20.** При $n=3$ а) $\varphi=60°$; б) $\operatorname{tg}\varphi=2\sqrt{3}$.

II.1. а) $\sqrt{h^2+d^2}$, $\sqrt{h^2+2d^2}$; б) $\sqrt{1+d^2}$. **II.3.** а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; в) $2\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; г) 1; д) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; ж) $\sqrt{2}$; з) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; и) $2\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **II.12.** 1. а) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. 2. а) 1/4; б) 1/8; в) $3\dfrac{\sqrt{3}}{16}$. **II.13.** Для одного из рёбер: от $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ до 1. Для диагонали: от $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ до $\sqrt{3}$.

II.20. а) $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$, $\sqrt{\cos^2\varphi_1-\sin^2\varphi_2}$; б) $\cos(\angle(AB),p)=\sqrt{\cos^2\varphi_1-\sin^2\varphi_2}$.

II.21. а) $\cos\varphi_1=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}}$; б) $\cos\varphi_2=\dfrac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$. **II.24.** а) $\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi}{6}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$.

II.25. $\dfrac{\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$, если сечение — треугольник; $\left(1-\dfrac{\operatorname{ctg}\varphi}{\sqrt{3}}\right)\dfrac{1}{\sin\varphi}$, если сечение — трапеция.

Глава 3

16.5. а) $2\sqrt{3}$; б) $4\sin\dfrac{\varphi}{2}$; в) расстояние равно $0{,}5\sqrt{16-d^2}$, а $\sin\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{d}{4}$.

16.8. а) $\sqrt{3}$; б) $\varphi=60°$. **16.9.** а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$. **16.20.** в) $R/\cos\dfrac{\varphi}{2}$. **18.6.** $2R=d\cos\varphi$, $H=d\sin\varphi$. **18.11.** б) $R/\sin\dfrac{\varphi}{2}$. **19.7.** а) $\sqrt{5}$. **19.8.** а) $\sqrt{3}:2$; б) $\sqrt{3}:2$. **19.13.** От 0 до $3\sqrt{3}$. **20.1.** а) 45°, 105°, 135°, 75°; б) 90°; в) 60°; г) 30°. **20.2.** $180°-\varphi$, $2\alpha-\varphi$, $180°+\varphi-2\alpha$. **20.3.** φ или $180°-\varphi$. **20.4.** $180°-\alpha$, $180°+\alpha$. **20.5.** $|\beta-\alpha|/2$. **20.6.** $\sqrt{ab}$. **20.13.** $abc/(c^2-b^2)$, $ab^2/(c^2-b^2)$. **20.15.** $\dfrac{R}{R+H}\sqrt{H(2R+H)}$. **20.16.** Отношение большей части хорды к меньшей равно $\sqrt{3}+1$. **20.23.** а) $5\sqrt{3}$ или $\dfrac{15\sqrt{3}}{7}$; б) $3\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ или $\sqrt{21}$. **20.24.** а) $abc/4S$.

20.38. б) $\dfrac{2Rr}{R+r}$. **20.42.** а) $(8R;\infty)$; б) $(R^2;\infty)$.

III.1. б) $\sqrt{R^2-r^2}$; в) $\sqrt{8}\pm\sqrt{5}$. **III.2.** в) $R=\dfrac{r}{\cos\frac{\varphi}{2}}$. **III.3.** $\operatorname{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{4(R^2-r^2)}{4r^2-d^2}$.

III.5. $2R\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$. **III.6.** $r<R(3-2\sqrt{2})$. **III.7.** Высота и диаметр основания равны $R\sqrt{2}$. **III.8.** $d\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{d}{2}$. **III.9.** $r=\dfrac{d}{2+\sqrt{2}}$.

Глава 4

21.9. а) 60°; б) 45°; в) 90°; г) 60°; д) $\operatorname{tg}\varphi=2\sqrt{3}:3$. **21.10.** а) 1; б) $\sqrt{3}:2$; в) $\sqrt{19}:2$; г) $2\sqrt{3}:3$; д) $\sqrt{19}:4$. **21.13.** а) $\cos\varphi=\sqrt{3}:3$; б) 45°; в) $\cos\varphi=-\sqrt{3}:3$ или $\cos\varphi=1:3$; г) $\cos\varphi=\sqrt{3}:3$ или $\cos\varphi=-1:3$. **21.15.** а) 45°; б) 60°. **21.21.** 1) а) 1; б) $\sqrt{3}:2$; в) $\sqrt{3}:2$; г) 1 и $\sqrt{3}:2$; д) $\sqrt{3}:2$; 2) 1 и $\sqrt{3}$. **21.22.** 1) а) 90°; б) 60°; в) 60°; г) 60°, 90° и 120°.

IV.1. Углы приведены с точностью до градуса. Тетраэдр — 70°, куб — 90°, октаэдр — 109°, додекаэдр — 116°, икосаэдр — 138°. **IV.2.** Сначала проводится радиус описанной сферы. Тетраэдр: $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$. Куб: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{2}$. Октаэдр: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Додекаэдр: $\frac{\sqrt{3}\,(1+\sqrt{5})}{4}$, $\frac{\sqrt{10\,(25+11\sqrt{5})}}{20}$. Икосаэдр: $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{\sqrt{3}\,(3+\sqrt{5})}{12}$.
IV.4. 3а) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 3б) 1; 3в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4а), б), в), д) 45°; 4е) 60°; 4г) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; 5) $\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3}$; 6а) от 0 до 1; 6б) от 0 до $\sqrt{2}$; 6в) от 0 до $\sqrt{2}/2$; 7) $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
IV.5. 3а) 1; 3б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4а) 45°; 4б) 90°; 4в) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; 4г) 60°; 5) $\frac{1}{2\cos\varphi}$; 6а) от $\frac{\sqrt{2}}{4}$ до $\frac{1}{2}$; 6б) от $\frac{1}{2}$ до $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6в) от 0 до $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.
IV.6. 3а) $\sqrt{3}$; 3б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 3в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4а) 45°; $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4б) 45°, 90°; 4в) 45°, 120°, 90°; 4г) 45°; 4д) 90°; 5) $\frac{1}{2\cos\varphi}$, $\frac{1}{2\cos\varphi\,(\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi+1)}$ или $\frac{\sqrt{2}}{4}$ при $\varphi=90°$; 6) $R=1$, $r=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$. **IV.7.** 3а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 3в) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4а) 45°; б) $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{arctg} 2$; 4в) 60°; 4г) $\arccos\frac{3}{5}$; 4д) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; 5) $\frac{24}{(2\sqrt{3}+1)^2}$; 6а) от 0 до $\sqrt{3}$; 6б) от $\frac{\sqrt{3}}{2}$ до 1 или $\sqrt{3}$; 6в) от 0 до 1; 6д) от 0 до 1/2; 7) $R=1$.

Глава 5

26.7. 1) $\sqrt{2}:2$. **26.8.** а) от 0 до $4\pi\sqrt{3}:9$; б) от 0 до $4\pi\sqrt{2}:9$. **26.9.** 1) $\sqrt{3}:9$. **26.10.** Объём одной из частей: а) $\sqrt{3}:6$; б) 0,5; в) $\sqrt{3}:6$. **26.13.** а) 3 : 4; б) $42\sqrt{6}$; в) $(3-\sqrt{3}):4$. **26.14.** а) от 0 до ∞. **26.15.** а) От 0 до $\sqrt{3}:9$; б) от 0 до $4\sqrt{3}:45$. **27.1.** а) 3 : 4; б) $\sqrt{39}:8$; в) $\sqrt{11}:4$. **27.2.** а) $\sqrt{6}:2$; б) $\sqrt{3}:2$; в) $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}$. **27.3.** а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{14}:2$. **27.4.** а) $\sqrt{2}:2$; б) $\sqrt{2}:2$. **27.5.** 1. **27.7.** 2. **27.10.** а) $\pi:8$; б) π; в) $\pi\sqrt{3}\,d^3/24$. **27.11.** а) $\pi\sqrt{3}:3$; б) $\pi\sqrt{3}:4$; в) $7\pi:3$; г) $\pi:4$; д) $3\pi:2$. **27.14.** а) $\cos\varphi=-1:3$; 2а) от 0 до $\pi:8$; б) от 0 до $2\pi\sqrt{3}:27$. **27.15.** $(4\pi-3\sqrt{3}):(8\pi+3\sqrt{3})$. **27.16.** Любым. **27.19.** а) $\sqrt{15}:3$; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{23}:3$; г) $\sqrt{6}:2$; д) $\sqrt{2}$; е) $\sqrt{3}:2$. **27.20.** а) 1 : 8; б) $\sqrt{3}:12$. **27.21.** От 0 до 1/6. **27.23.** а) $\sqrt{3}:3$; б) $\sqrt{2}:3$; в) 1 : 3; г) $\sqrt{14}:6$; д) 2 : 3. **27.24.** а) $\cos\varphi=1:3$; б) от 0 до $16\sqrt{3}:135$. **27.35.** а) $\pi:6$; б) $\pi:6$; в) $\pi\sqrt{6}:216$; г) $\pi\sqrt{3}:54$; д) $\pi\sqrt{2}\,(3\sqrt{3}-5):12$; е) $\pi(\sqrt{2}-1)^3:6$; ж) $\pi:6$. **28.4.** а) В 10 раз; б) на 10^9. **28.6.** а) $\frac{3+\sqrt{6}}{33-\sqrt{6}}$; б) $\frac{5-\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}$; в) 1 : 5; г) 1 : 3. **28.7.** 45°. **28.8.** а) От 0 до 1; б) от 6 до ∞. **28.10.** а) $2+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{13}$; б) $2+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{15}$. **28.12.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

28.13. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **28.15.** а) 1; б) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $\frac{\sqrt{7}}{1+2\sqrt{2}}$. **28.21.** $\frac{3}{4}S$. **28.22.** а) 3π; б) 2π; в) $5\pi/4$. **28.24.** а) 6π; б) в одном из случаев $6+2/\pi$. **28.28.** 1) Квадрат; 2) а) от 34π до ∞; б) от 24π до 40π; от 40π до ∞. **28.29.** 1) Квадрат; 2) а) от 26 до 54. **28.30.** а) 3π; б) $\frac{5}{16}\pi$; в) $\frac{3}{4}\pi R^2$; г) $\pi L^2\cos\varphi\,(1+\cos\varphi)$. **28.33.** а) От 0 до π; б) от 0 до 2π. **28.34.** От 0 до $\pi/4$. **28.35.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **28.36.** 9π или $\pi(3+2\sqrt{3})$. **28.37.** $\pi(R+r)L$.

V.1. $\sqrt{3}$. **V.2.** 2. **V.3.** 4. **V.4.** 2. **V.5.** $48\sqrt{3}$. **V.6.** 1) $\frac{4\pi}{27}R^2H$; 2а) $\frac{\sqrt{3}}{9}R^2H$; 2б) $\frac{8}{27}R^2H$. **V.7.** 1) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^2$; 2а) $\frac{32\pi}{81}R^3$; 2б) R^3; 2в) $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$; 2г) $\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$; 2д) $\frac{64}{81}R^3$. **V.8.** 4. **V.9.** Радиус основания конуса равен 2/3, высота равна 1/3. **V.10.** а) $16\sqrt{3}$; б) 64/3. **V.11.** $3\sqrt{5}$. **V.12.** Искомые величины равны 4. **V.13.** $108\sqrt{3}$. **V.14.** 2. **V.15.** 32/3. **V.16.** 2. **V.17.** Искомые величины равны 16. **V.18.** Искомая величина равна 4. **V.19.** 6.

Глава 6

29.2. в) (1, 1, 5) или (1, 1, –5); г) $(1, 1, \sqrt{23})$ или $(1, 1, -\sqrt{23})$; д) 1. **29.4.** В одном из случаев $(0, \sqrt{3}, 0)$ и $(0, \sqrt{3}/3, 2\sqrt{6}/3)$. **29.6.** К началу координат — точка C, к плоскости (yz) — точка B, к оси x — точка A. **29.7.** в) $\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$. **29.8.** $KL=\sqrt{6}$, $LM=\sqrt{5}$. **29.10.** а) $x=0$, $y=1$, $z=0$; б) $x=1$, $y=1$, $z=0$; в) $x=1$, $y=1$, $z=1$. **29.11.** а) $z=2$, $z=-2$; б) $x=2$, $x=4$; в) $y=-1$. **29.13.** а, б, в, д, и, к, л) окружность; ж) две окружности; з, м) две точки; г) точка; е) пустое множество. **29.14.** г) $x^2+y^2+z^2=3$; д) одно из уравнений $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$; е) $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$. **29.18.** в) боковая поверхность бесконечной прямой призмы. **31.2.** а) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, б) один из ответов $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; в) один из ответов $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; г) $(\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \cos\varphi_3)$. **31.3.** в) $\cos\varphi_1=-\frac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\varphi_2=-\frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\varphi_3=-\frac{2}{\sqrt{14}}$. **31.4.** а) (0, 1, 1); б) (1, 1, 1); в) (–1, 1, 0); г) (0, –1, 0); д) (1, 0, 0); е) (–1, 1, –1). **31.8.** г) (–16, 6, 8); д) $\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$. **31.9.** а) (–1, –1, –2); б) (0, 0, –8); в) (1, 3, 0); г) (–5, –3, –4); д) (2; 5,5; –1,5). **31.10.** Нет. **31.11.** е) –9; ж) –72. **31.12.** е) $\sqrt{41}$. **31.13.** в) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{85}}\right)$. **31.15.** ж) $4+\sqrt{2}+\sqrt{3}$. **31.16.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0; г) 0; д) $-\frac{1}{2}$.

Предметный указатель

Список литературы

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Стереометрия. Ч. 2 / Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1951. Смотрите также в Интернете по адресу: libriz.net/.../72853-elementarnaya-geometriya-stereometriya.html

2. *Александров А.Д.* Геометрия, 8. Учебник для школ с углублённым изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2008.

3. *Александров А.Д.* Геометрия, 9. Учебник для школ с углублённым изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2004.

4. *Александров А.Д.* Геометрия. Учебник для 10 класса школ с углублённым изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2006.

5. *Александров А.Д.* Геометрия. Учебник для 11 класса школ с углублённым изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2006.

6. *Александров А.Д.* Стереометрия / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — Висагинас: Alfa, 1998.

7. *Анрах Дж. Тимоти.* Удивительные фигуры / Анрах Дж. Тимоти. — М.: АСТ, Астрель, 2002.

8. *Баврин И.И.* Новые задачи по стереометрии / И. И. Баврин, В. А. Садчиков. — М.: Владос, 2000.

9. *Веннинджер М.* Модели многогранников / М. Веннинджер. — М.: Мир, 1974.

10. *Вейль Г.* Симметрия. — М.: Наука, 1968. Смотрите также в Интернете по адресу: ilib.mccme.ru/djvu/weyl-symmetry.htm

11. *Виленкин Н.Я.* За страницами учебника математики / Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. — М.: Просвещение, 1996.

12. *Волошинов А.В.* Математика и искусство. — М.: Просвещение, 2000.

13. *Гильберт Д.* Наглядная геометрия / Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен. — М.: Наука, 1981. Смотрите также в Интернете по адресу: www.bookshunt.ru/b43943_naglyadnaya_geometriya

14. *Готман Э.Г.* Стереометрические задачи и методы их решения / Э. Г. Готман. — М.: МЦНМО, 2006.

15. *Делоне Б.Н.* Задачник по геометрии / Б. Н. Делоне, О. К. Житомирский. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

16. Журнал «Квант». Смотрите также в Интернете по адресу: http://kvant.mirror1.mccme.ru/

17. *Костицын В.Н.* Практические занятия по стереометрии / В. Н. Костицын. — М.: Экзамен, 2007.

18. *Костицын В.Н.* Моделирование на уроках геометрии / В. Н. Костицын. — М.: Экзамен, 2004.

19. *Кушнир И.А.* Треугольник и тетраэдр в задачах / И. А. Кушнир. — Киев: Факт, 2004.

20. *Литвиненко В.Н.* Многогранники / В. Н. Литвиненко. — М.: Вита-Пресс, 1995.

21. *Литвиненко В.Н.* Сборник задач по стереометрии / В. Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1998.

22. *Литвиненко В. Н.* Сборник типовых задач по геометрии. 10—11 / В. Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1999.

23. *Литвиненко В. Н.* Задачи на развитие пространственных представлений / В. Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1991.

24. *Лурье М. В.* Геометрия. Техника решения задач / М. В. Лурье. — М.: УНЦ ДО, Физматлит, 2002.

25. Смотрите сайт «Математические этюды» в Интернете по адресу: http://www.etudes.ru/

26. *Петров В. А.* Математика. Прикладные задачи / В. А. Петров. — М.: Дрофа, 2010.

27. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ, Астрель, 2002.

28. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. Т. 2 / Я. П. Понарин. — М.: МЦНМО, 2006.

29. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2007.

30. *Прасолов В. В.* Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2010.

31. *Рутерсвард О.* Невозможные фигуры / О. Рутерсвард. — М.: Стройиздат, 1990.

32. *Севрюков П. Ф.* Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. — М.: Ставрополь: Илекса, 2008.

33. *Смирнова И. М.* В мире многогранников / И. М. Смирнова. — М.: Просвещение, 1995.

34. *Шестаков С. А.* Векторы на экзаменах / С. А. Шестаков. — М.: МЦНМО, 2005.

35. *Яковлев Г. Н.* Геометрия / Г. Н. Яковлев. — Висагинас: Alfa, 1998.

36. *Иванов С. Г.* Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» / С. Г. Иванов, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2013.

Учебное издание

Александров Александр Данилович
Вернер Алексей Леонидович
Рыжик Валерий Идельевич

**МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА,
ГЕОМЕТРИЯ**

ГЕОМЕТРИЯ

10—11 классы

Учебник для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни
Центр естественно математического образования
Редакция математики и информатики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Т. Ю. Акимова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*. Художник *В. А. Андрианов*
Художественные редакторы *Е. Р. Дашук, О. П. Богомолова*
Техническое редактирование и компьютерная вёрстка *Е. В. Саватеева*
Корректор *Т. А. Дич*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01.
Подписано к печати с оригинал-макета 18.03.14. Формат $70 \times 90\ ^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 15,03 + 0,51 форз. Тираж 3000 экз. Заказ 5772.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Тверской полиграфический комбинат
детской литературы ОАО «Издательство «Высшая школа»
170040, Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46
Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс +7(4822) 44-61-51